

Sur le déferlement des vagues

Pomeau Y.¹, Le Bars M.², Le Gal P.², Jamin T.², Le Berre M.³, Guyenne Ph.⁴, Grilli S.⁵ & Audoly B.⁶

¹ Los Alamos National Lab, CNLS, Los Alamos, NM 87545, USA

² IRPHE, 49 rue F. Joliot Curie, 13384 Marseille

³ Laboratoire de Photophysique Moléculaire, Bat.210, 91405 Orsay, France

⁴ Department of Mathematics, University of Delaware, Newark DE 19716-2553, USA

⁵ Department of Ocean Engineering, University of Rhode Island, Narragansett, RI 02882, USA

⁶ L.M.M., Université Pierre et Marie Curie, 4 Place Jussieu, 75252 Paris

legal@irphe.univ-mrs.fr

Résumé. Le déferlement des vagues peut-être considéré comme la manifestation d'une singularité dans la solution des équations du mouvement de l'interface. Alors que l'étude des lois d'échelles découlant de l'apparition d'une singularité pour le cas d'une dynamique à une seule dimension d'espace est connue, ces résultats sont étendus par une analyse théorique des équations de Burgers à deux dimensions puis des équations d'eau peu profonde. A partir de l'instant où apparaît le déferlement ($t=0$) la crête des vagues s'élargit transversalement en $t^{1/2}$ alors que l'épaisseur de la vague croît longitudinalement comme $t^{3/2}$. Ce comportement générique se déduit de considérations purement géométriques qui conduisent à une description dynamique du déferlement où les effets non-linéaires sont dominants. Nos prédictions théoriques sont alors confirmées par les simulations numériques des équations d'Euler en 3D pour le cas de vagues déferlant sur un fond incliné et par une étude expérimentale où les vagues sont initiées par un batteur et se propagent sur un fond horizontal.

Abstract. Wave breaking can be seen as the manifestation of a singularity in the solution of the equations for the dynamics of the fluid surface. The analysis of the scaling laws coming from the appearance of this singularity in a single spatial dimension is known. These results are first extended by a theoretical analysis of the two-dimensional Burgers equation then of the shallow water equations. From the onset of breaking ($t=0$) the crest of the wave extends laterally as $t^{1/2}$ together with the thickness of the wave that grows as $t^{3/2}$. This generic behavior is deduced from pure geometrical considerations and leads to a description of the dynamics of the breaking where non linear effects are dominant. Our theoretical predictions are then confirmed by numerical simulations of the 3D Euler equations for the case of waves that break on an inclined bottom and by an experimental study where waves are generated by a wave maker and progress on an horizontal bottom.

1 Introduction

Le déferlement des vagues a depuis toujours inspiré de nombreux artistes comme en témoignent "La grande vague au large de Kanagawa" de Hokusai ou encore les fameuses représentations de vagues peintes par Courbet. Mais les peintres ne furent pas les seuls à s'intéresser à ce phénomène. L'attention des physiciens a aussi été attirée par ce comportement singulier des vagues dont l'apparition est source de multiples phénomènes nouveaux et primordiaux pour la compréhension des interactions et des échanges entre océans et atmosphère comme la turbulence ou la création et la dispersion de gouttes ou de bulles. Notre analyse mathématique de la singularité qui pré-existe au déferlement, s'appuie sur la remarque de Poisson [1] en 1808 qui expliqua la résolution du problème de Cauchy pour l'équation suivante, à une seule dimension d'espace x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

L'équation (1) possède la solution implicite suivante

$$u(x, t) = u_0(x - ut), \quad (2)$$

où u_0 est la condition initiale du problème. Une autre manière d'écrire cette solution est de considérer l'inverse $f(\cdot)$ de la fonction u_0 . Dans ce cas l'équation (2) peut s'écrire :

$$f(u(x, t)) = x - ut, \quad (3)$$

Pour toutes conditions initiales suffisamment lisses, la première singularité de la fonction $u(x, t)$ qui apparaît dans le temps, se manifeste au point d'inflexion de $u(x, t)$. Ainsi, au voisinage de ce point - que l'on place en $x = u = t = 0$, grâce aux invariances par translation et par transformation Galiléenne - le développement de Taylor de $f(u)$ se réduit au simple terme du troisième ordre u^3 . Ainsi, l'équation universelle du déferlement à une seule dimension d'espace s'écrit :

$$0 = u^3 + x - ut. \quad (4)$$

L'examen de l'équation (4) montre que pour des temps courts, u se comporte comme $t^{1/2}$ et x comme $t^{3/2}$, ce qui permet à tous les termes de l'équation d'être à l'ordre $t^{3/2}$. Le coefficient de u^3 a été pris égal à (-1) par un choix judicieux des dimensions et de signe négatif pour que la singularité apparaisse pour des temps positifs. Ainsi comme le montre la figure 1, $u(x)$ est multivaluée pour une certaine plage d'abscisse x quand t est positif. Notons cependant que si un terme dissipatif est ajouté à l'équation (1) pour qu'elle ressemble à l'équation de Navier-Stokes de la dynamique des fluides, la solution n'est plus multi-valuée mais forme un choc qui régularise la solution de l'équation (1). Il est important de noter que cette régularisation n'est pas nécessairement pertinente dans le cas du déferlement des vagues à la surface libre d'un fluide.

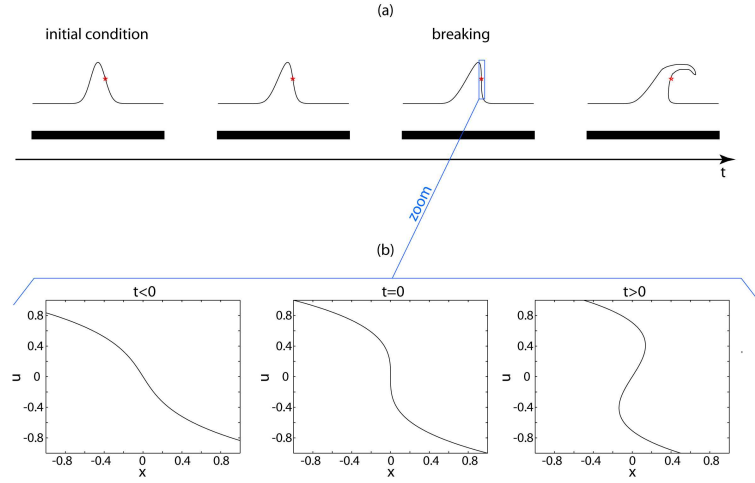


Fig.1. Illustration de l'apparition ($t < 0$) d'une singularité avant le déferlement de la vague. Pour $t > 0$, la solution présente un point d'inflexion et est multivaluée.

2 Etude de la singularité des équations de Burgers 2D

Cette approche standard du problème mathématique de la formation des chocs dans les solutions des équations hyperboliques non linéaires à une seule variable d'espace, peut-être étendue aux équations dans des espaces de plus grande dimensionalité. Si nous considérons le cas à deux variables d'espace x et y , une simple généralisation de l'équation (1) fournit un modèle pour l'apparition de singularités pour des fonctions dans le plan (x, y) . Ce modèle est en fait un modèle d'équations décrivant la dynamique d'un

fluide sans pression. Appelons $u(x, y, t)$ et $v(x, y, t)$ les deux projections cartésiennes de la vitesse, leurs dynamiques se décrivent par les équations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Remarquons que des modèles proches de ces équations ont été proposés pour décrire la formation des grandes échelles de l'univers [2]. Ces équations possèdent une solution formelle très similaire à la solution du cas uni-dimensionnel (3) :

$$x - tu(x, y, t) = F(u, v), \quad (7)$$

et

$$y - tv(x, y, t) = G(u, v). \quad (8)$$

Nous remarquons alors, que le membre de gauche de ces équations est invariant par application de tout opérateur linéaire M qui transformerait le repère (x, y) en (\tilde{x}, \tilde{y}) . En effet, dans ce cas $(\tilde{u}, \tilde{v}) = M(u, v)$ est solution de l'équation correspondante. Bien-entendu, les termes de droite des équations sont modifiés de manière complexe, mais à cause de la linéarité de l'opérateur M , celui-ci ne modifie pas l'ordre des développements de Taylor de $F(u, v)$ et $G(u, v)$. Cette remarque va permettre par la suite de simplifier l'analyse par des changements adéquats de variables en orientant le repère de telle sorte que la singularité s'étende perpendiculairement à x . Comme pour le cas 1D, les fonctions $F(u, v)$ et $G(u, v)$ sont définies par les conditions initiales. Si celles-ci sont suffisamment lisses, (u, v) et (x, y) sont liées de manière univoque avant l'apparition de la singularité. Par contre, la solution des équations (5) et (6) devient singulière quand le Jacobien $J(t)$ de l'application de (u, v) vers (x, y) s'annule. Ce Jacobien s'écrit :

$$J(t) = \left(\frac{\partial G}{\partial v} + t \right) \left(\frac{\partial F}{\partial u} + t \right) - \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v}. \quad (9)$$

En utilisant les propriétés d'invariance par translation et par transformation Galliléenne, on peut toujours supposer que la première singularité apparaît pour $t = 0$ et aux coordonnées $x = y = 0$ avec $u = v = 0$ également. Ainsi une condition similaire à la condition de l'existence du point d'inflexion pour le problème 1D est que dans un voisinage de $t = u = v = 0$, le développement de Taylor de $J(t)$ ne comporte pas de termes linéaires en u et v :

$$J(t) = at + bu^2 + cv^2 + 2d uv + \dots, \quad (10)$$

Les constantes a, b, c et d doivent être obtenues des développements de Taylor de $F(u, v)$ et $G(u, v)$ près de l'origine. D'autre part, à $t = 0$ la matrice Jacobienne possède une valeur propre nulle car son déterminant s'annule. Grâce à la propriété évoquée plus haut et relative à l'orientation du repère, on peut toujours définir cette direction propre comme étant l'axe x . Ainsi, les coefficients du développement de Taylor des fonctions $F(u, v)$ et $G(u, v)$ doivent vérifier que $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$ et $\frac{\partial G}{\partial u} = 0$ pour $u = v = t = 0$. Ceci montre alors que le premier terme du développement de $F(u, v)$ est $b'v^2 + d'u^3$ alors que celui de $G(u, v)$ est simplement $c'v$, où b', c' et d' sont des coefficients provenant des conditions initiales de l'équation d'origine. De plus, parce que $G \sim v$, le terme vt peut être négligé dans l'équation (8) car t peut-être rendu à priori plus petit que la constante d' . L'équation (8) devient donc $y = d''v$. Si on remplace alors le terme proportionnel à v^2 dans l'équation (7), celle-ci devient après mise à l'échelle des coefficients et en ne retenant que les termes d'ordre $|t|^{3/2}$ (voir [3] ou [4] pour plus de détails) :

$$0 = u^3 + x - u(t - y^2). \quad (11)$$

Ainsi, cette équation, équivalente à l'équation (4) du cas uni-dimensionnel, généralise le comportement de la solution bi-dimensionnelle au voisinage de sa singularité et montre en particulier que celle-ci progresse

selon l'axe y , c'est-à-dire le long de la crête des vagues, en \sqrt{t} . Nous avons alors montré dans les articles [3] et [4], que les solutions des équations d'eau peu profonde se comportent au voisinage de la singularité d'une manière similaire aux équations (5) et (6). Nous exposerons donc dans les paragraphes suivants nos vérifications expérimentales et par simulation numérique des équations d'Euler 3D. Nous verrons alors que les lois d'échelles obtenues à partir de l'équation (11) sont effectivement suivies par les déferlements des vagues en eau peu profonde.

3 Analyse expérimentale des déferlements

Plutôt que de filmer des vagues le long d'une plage, afin de mieux contrôler les paramètres du déferlement nous avons préféré générer des ondes solitaires sur une table à eau munie d'un dispositif de visualisation par ombroscopie et d'un fond horizontal. La figure 2 présente le dispositif expérimental. L'épaisseur d'eau est de l'ordre de 2 cm et les vagues solitaires sont générées par le brusque mouvement vers le bas d'un batteur incliné par rapport à la surface. Les déformations de la surface de l'eau initialement plane provoquant une focalisation ou une défocalisation de la lumière traversant la nappe, la visualisation par ombroscopie des vagues et de leurs déferlements peut être enregistrée par caméra vidéo rapide cadencée entre 1 et 3.6 kHz. Les grandes dimensions de la table (longueur 2 m et largeur 1.4 m) permettent de retarder l'interaction entre la vague solitaire générée par le batteur et les vagues réfléchies sur les bords équipés de bandes de mousse et ainsi d'éviter des effets parasites.

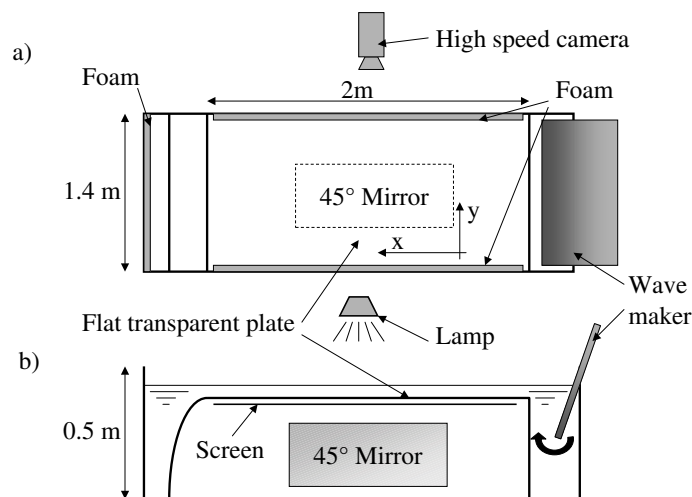


Fig.2. Montage expérimental, a) vue de dessus, b) vue de côté. Une onde solitaire est initiée par le mouvement rapide d'un batteur. Les déformations de la surface sont visualisées par ombroscopie et enregistrées par caméra rapide.

La Figure 3 montre un exemple de trois images consécutives d'un film d'une vague se propageant de la droite vers la gauche et déferlant au milieu de son parcours le long de la table. Ces images sont extraites d'un film enregistré à 2.8 kHz. Les tailles horizontales et verticales des images sont limitées par la taille du miroir. La vague y apparaît comme la juxtaposition d'une ligne sombre et d'une ligne claire formées par la focalisation et la défocalisation de la lumière par les déformations de la surface libre. Le déferlement de la vague est clairement observé sur les images b) et c) par la courbure de la ligne noire qui se déplace juste en avant de la crête de la vague. Les flèches de la Figure 3-b) montrent les deux singularités associées au déferlement et progressant le long de l'axe y . On peut alors superposer une série complète d'images :

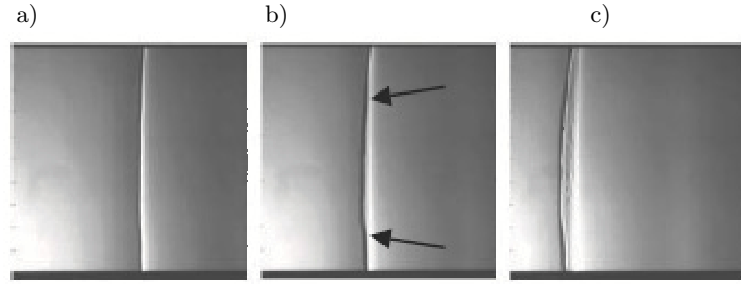


Fig.3. Ombroscopie du déferlement d'une vague enregistrée par caméra rapide. a) $t = 25ms$, b) $t = 100ms$, c) $250ms$. Les flèches indiquent les positions des singularités qui progressent le long de l'axe y . La taille de la fenêtre d'observation est de $32.5\text{ cm} \times 32.5\text{ cm}$.

comme la vague se déplace à vitesse constante dans la direction longitudinale, la variable x est alors directement proportionnelle au temps t . Afin d'améliorer le contraste de l'image obtenue, le gradient horizontal de chaque image est d'abord calculé. La Figure 4-a montre cette superposition où les images successives sont séparées de 3 ms. Le déferlement apparaît par la trace sombre qui possède bien, comme démontré par l'analyse précédente, une forme en \sqrt{t} . Cette loi d'échelle est finalement confirmée par la représentation logarithmique de la figure 4-b.

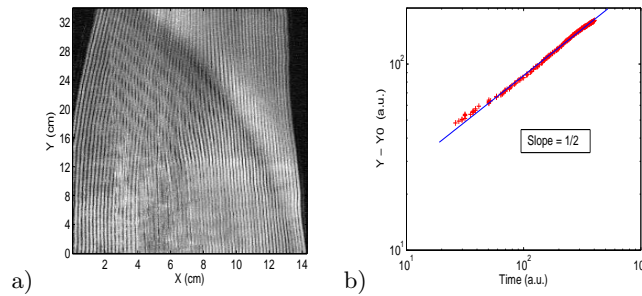


Fig.4. a) Trace du déferlement obtenue par superposition d'images séparées de 3 ms. L'axe horizontal est proportionnel au temps. La profondeur de la couche d'eau est de 17.4 mm et la hauteur de la vague est 8 mm . b) Représentation logarithmique de la progression du déferlement qui confirme la progression transversale en \sqrt{t} .

4 Analyse numérique des déferlements

Le système d'équations d'Euler 3D pour un fluide possédant une surface libre a été très récemment résolu numériquement afin de simuler les étapes initiales du déferlement tri-dimensionnel d'une onde solitaire [5]. Ce déferlement est provoqué par un changement de topographie du fond pour un écoulement en eau peu profonde. Les vagues se propagent vers les x positifs et la hauteur d'eau $z = -h_0$ est tout d'abord constante dans la première partie du canal. Le fond en pente débute à l'abscisse $x = 5.22$ avec une pente de $1/5$ dans la partie centrale et une modulation transverse de forme $sech^2(ky)$ (les variables non adimensionnées (x, y) étant mises à l'échelle par h_0 et le temps par $\sqrt{h_0/g}$). Avec un tel fond, la vague déferle en $y = 0$. Nous nous intéresserons ici aux résultats obtenus pour $k = 0.25$. Le profil 3D de la vague au temps $t = 1.378$ est représenté sur la Figure 5-a, juste avant que le jet ne plonge vers la surface sous-jacente. D'autre part, le contour apparent du domaine déferlé de la surface est également représenté dans l'espace (x, y, z) en Figure 5-b. A partir des projections de ce contour apparent sur le plan

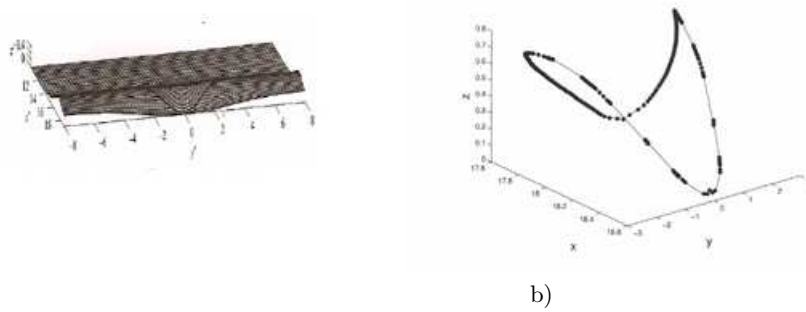


Fig.5. Simulation numérique 3D de la vague déferlante (a), représentation tri-dimensionnelle du contour du domaine déferlé au temps $t = 1.378$ (b).

(x, y) , il est aisé de mesurer son extension selon les deux axes x et y . La Figure 6 montre les évolutions longitudinale et transversale de la zone déferlée. Les deux courbes présentent un excellent accord avec les lois de puissance $t^{3/2}$ et $t^{1/2}$ obtenues théoriquement.

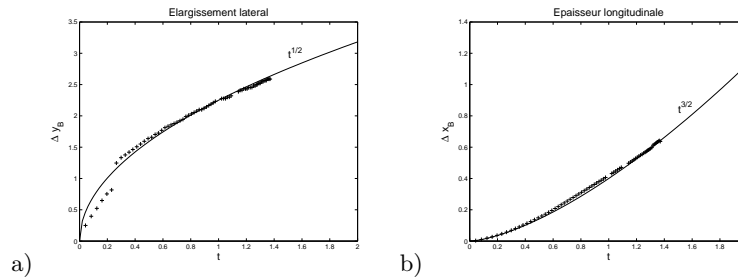


Fig.6. Résultats du calcul numérique. a) Extension longitudinale du domaine déferlé. b) Extension latérale du domaine déferlé.

5 Conclusion

Après avoir présenté l'analyse théorique de la solution de l'équation de Burgers sans viscosité dans le cas uni-dimensionnel, nous avons étendu cette théorie au cas bi-dimensionnel. L'équation maîtresse obtenue fait apparaître des lois d'échelles respectivement en $t^{3/2}$ et $t^{1/2}$ pour les extensions longitudinales et transversales des déferlements. Une extension de ces résultats pour les équations d'eau peu profonde (non présentée ici, mais détaillée dans [3] et [4]) montre que ces résultats peuvent être appliqués aux déferlements des vagues à la surface d'un fluide. Une analyse expérimentale ainsi que des simulations numériques tri-dimensionnelles attestent de la validité de nos prédictions théoriques.

Références

1. S.D. POISSON, *Mémoire sur la théorie du son*, Journal de l'Ecole Polytechnique, (14), **7**, 319-392 (1808).
2. Ya.B. Zel'dovich, *Astrophysics*, **6** (1970), pp 319-335.
3. Y. POMEAU, T. JAMIN, M. LE BARS, P. LE GAL AND B. AUDOLY, Law of Spreading of the crest of a breaking wave, (accepté aux Proc. Roy. Soc., 2008).
4. Y. POMEAU, M. LE BERRE, P. GUYENNE AND S.T. GRILLI, Wave breaking and generic singularities of nonlinear hyperbolic equations, (preprint, 2008).
5. P. GUYENNE AND S.T. GRILLI, Numerical study of three-dimensionnal overtuning waves in shallow water, *Journal of Fluid Mech.*, **547**, 361-388 (2006).