



Modélisation non-linéaire des interactions des vagues avec un corps mobile immergé

Etienne GUERBER¹, Michel BENOIT¹, Stephan GRILLI², Clément BUVAT¹

1. Laboratoire d'Hydraulique Saint-Venant, Université Paris-Est,
(unité de recherche commune EDF R&D, CETMEF, Ecole des Ponts ParisTech),
6 quai Watier, 78400 Chatou, France.
etienne.guerber@edf.fr ; michel.benoit@edf.fr ; clement.buvat@edf.fr
2. Department of Ocean Engineering, University of Rhode Island,
Narragansett, RI 02882, USA.
grilli@oce.uri.edu

Résumé :

Les travaux présentés concernent le développement d'un code de simulation avancé permettant de décrire le mouvement d'un corps immergé sous l'action des vagues, avec des mouvements de grande amplitude. A terme, cet outil est destiné à modéliser le comportement de certains types de Systèmes Récupérateurs d'Énergie des Vagues (SREV) immergés.

Dans cette étude on adopte une approche potentielle pour la partie hydrodynamique, dans un cadre 2DV (i.e. dans un plan vertical), correspondant au cas d'un canal à houle numérique. Le modèle utilisé pour la génération et la propagation des vagues est un modèle potentiel complètement non-linéaire, fondé sur une méthode d'éléments de frontières d'ordre élevé, développé par Grilli et ses collaborateurs depuis une vingtaine d'années. Ce modèle, déjà largement validé sur différents types d'applications océaniques et côtières, a été modifié pour prendre en compte la présence d'un corps rigide immergé, fixe ou mobile, avec le calcul des efforts de pression hydrodynamique s'exerçant sur le corps. Une méthodologie spécifique a été développée pour résoudre le problème couplé hydrodynamique/mécanique. Nous présentons deux cas de validation pour lesquels les résultats du modèle numérique sont comparés à des résultats d'autres modèles mathématiques : théorie analytique de WU (1993) sur le cas d'un cylindre en mouvement circulaire imposé et théorie linéaire d'EVANS *et al.* (1979) sur le cas d'un cylindre soumis à des forces externes (forces de rappel, force représentant l'extraction d'énergie des vagues,...), en plus des efforts hydrodynamiques.

Soumis le 30 novembre 2010, accepté le 9 février 2011, en ligne le 21 mars 2011.

La seule version examinée est celle écrite en français. La ou les autres versions n'étant pas examinées par le comité de rédaction de la revue, sont donc publiées sous l'entière responsabilité du ou des auteurs.

Pour citer cet article :

GUERBER E., BENOIT M., GRILLI S., BUVAT C. (2011). *Modélisation non-linéaire des interactions des vagues avec un corps mobile immergé*. Revue Paralia, Vol. 4, pp 2.1-2.12.

DOI:10.5150/revue-paralia.2011.002 (disponible en ligne – <http://www.paralia.fr> – available online)

1. Introduction

Les énergies renouvelables marines connaissent un fort regain d'intérêt ces dernières années, et en particulier l'énergie houlomotrice, avec la mise au point et les tests de plusieurs SREV. Parmi les différentes technologies proposées, les SREV de type "absorbeur ponctuel" utilisent le mouvement oscillant de corps flottants ou immergés sous l'effet des vagues. Ces corps sont souvent immergés à une faible profondeur sous la surface de l'eau et décrivent des mouvements de grande amplitude (voir par exemple le système CETO, MANN *et al.*, 2007). C'est pourquoi les modèles fondés sur l'hypothèse de mouvements de faible amplitude et/ou l'hypothèse d'une surface libre linéarisée ne sont pas adaptés à la simulation du système couplé hydrodynamique-dynamique du corps. Les travaux présentés ici consistent à développer un modèle numérique capable de calculer les interactions non-linéaires vagues/corps en 2 dimensions d'espace (2DV), pour être ensuite appliqué à la modélisation de la dynamique des SREV dans des états de mer réels (vagues irrégulières).

Une première étape dans ce projet consiste à résoudre le problème non-linéaire couplé pour le cas d'un cylindre horizontal immergé. Nous présentons ci-après les principales caractéristiques du modèle numérique développé ainsi que deux cas de validation pour un cylindre de section circulaire immergé, d'abord en mouvement imposé et ensuite en mouvement "libre" sous l'effet de plusieurs forces.

De nombreux auteurs se sont intéressés au calcul des interactions non-linéaires entre les vagues et un corps cylindrique. Ainsi CHAPLIN (1984) a effectué une série de tests en canal à vagues et a mesuré en particulier l'influence du nombre de Keulegan-Carpenter (K_C) sur les efforts hydrodynamiques exercés sur le corps. Plus récemment, WU (1993) a adopté une approche analytique pour calculer les efforts exercés sur un cylindre en mouvement forcé de grande amplitude, en utilisant des conditions de surface libre linéarisées et des conditions exactes sur le corps. Les travaux de ces deux auteurs ont été largement utilisés pour valider un ensemble de modèles numériques tels que le modèle *Sindbad* de COINTE (1989) fondé sur une méthode d'éléments de frontières (BEM : *Boundary Element Method*), ou encore le modèle développé par KENT & CHOI (2007) utilisant une méthode spectrale d'ordre élevé (HOS : *High-Order Spectral method*).

2. Formulation mathématique

2.1 Présentation générale du modèle

Nous utilisons un canal à houle numérique (NWT : *Numerical Wave Tank*) fondé sur un modèle potentiel complètement non-linéaire (FNPF : *Fully Nonlinear Potential Flow*) appliqué au calcul des interactions non-linéaires (forces hydrodynamiques et mouvement induit) entre l'écoulement dû aux vagues et un corps immergé représentant une section d'un SREV ancré sur le fond marin. Il s'agit d'une extension du modèle développé au cours des 20 dernières années par Stephan Grilli et ses collaborateurs

(GRILLI & SUBRAMANYA, 1996 ; GRILLI, 1997 ; GRILLI & HORRILLO, 1997). Les équations du modèle sont rapidement présentées dans la suite (pour plus de détails, se reporter aux références ci-avant). Le potentiel des vitesses $\phi(\underline{x}, t)$ est utilisé pour décrire un écoulement supposé irrotationnel et incompressible dans le plan (x, z) , et le champ de vitesses est désigné par $\underline{u} = \nabla\phi = (u, w)$.

L'équation de continuité sur le domaine fermé fluide $\Omega(t)$, de frontière $\Gamma(t)$, est une équation de Laplace sur le potentiel (voir Fig.1 pour un schéma du domaine de calcul) :

$$\nabla^2\phi = 0 \quad \text{sur } \Omega(t) \quad (1)$$

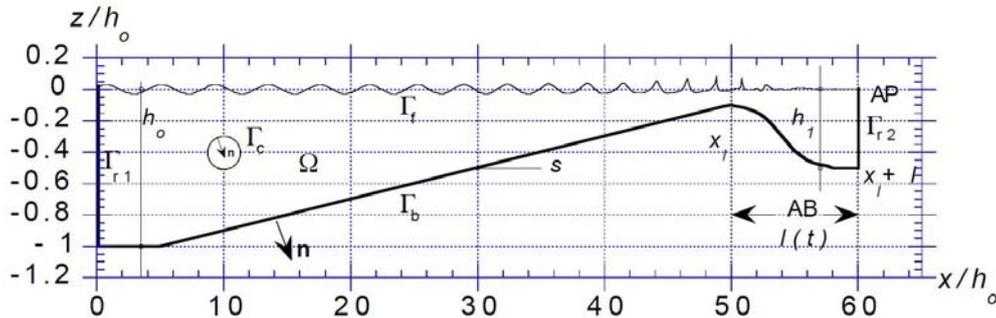


Figure 1. Exemple de domaine de calcul $\Omega(t)$ et frontières associées.

A la surface libre $\Gamma_f(t)$, le potentiel vérifie les conditions cinématique et dynamique de surface libre,

$$\begin{cases} \frac{D\underline{r}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u}\nabla\right)\underline{r} = \underline{u} = \nabla\phi \\ \frac{D\phi}{Dt} = -gz + \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi + \frac{p_a}{\rho} \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_f(t) \quad (2)$$

respectivement, avec \underline{r} le vecteur position de la surface libre, g l'accélération de la gravité, p_a la pression atmosphérique et ρ la masse volumique du fluide. Au fond, supposé stationnaire, une condition de non-pénétration est imposée :

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b \quad (3)$$

\underline{n} désigne le vecteur normal à la frontière considérée, orienté vers l'extérieur du domaine fluide.

Sur la frontière gauche du domaine $\Gamma_{r1}(t)$, des vagues périodiques ou irrégulières peuvent être générées par le mouvement d'un batteur plan de type "volet" ou "piston". Il est aussi possible d'utiliser une méthode de génération exacte de vagues périodiques fondée sur la théorie de la fonction de courant. A l'extrémité droite du domaine, une plage absorbante (AB) est implémentée pour réduire la réflexion des vagues sur la frontière $\Gamma_{r2}(t)$. Plus de détails sur la génération et l'absorption des vagues dans le modèle sont disponibles dans GRILLI & HORRILLO (1997).

Sur le corps immergé $\Gamma_c(t)$, une condition spécifique est imposée, détaillée dans la partie suivante.

L'équation (1) est transformée en une équation intégrale sur les frontières (BIE) à l'aide de la seconde identité de Green ; elle est ensuite résolue par la méthode des éléments de frontières. L'équation intégrale est évaluée en N nœuds de discrétisation sur les frontières et M éléments d'ordre élevé sont définis pour interpoler les variables entre les nœuds de discrétisation. Dans la suite, des éléments quadratiques isoparamétriques sont utilisés sur les frontières latérales et sur le fond. Des éléments linéaires isoparamétriques sont disposés sur le corps et des éléments cubiques sont utilisés sur la surface libre pour assurer la continuité de la pente de la frontière entre chaque élément. Sur ces derniers éléments, plus connus sous le nom d'*éléments d'interpolation cubique mixte*, la géométrie est modélisée par des fonctions de forme cubique et les variables physiques sont interpolées entre chaque paire de nœuds à l'aide d'un élément isoparamétrique "glissant" à 4 nœuds. Les expressions des intégrales sur les éléments (régulières, singulières et quasi-singulières) sont données dans GRILLI & SUBRAMANYA (1996). Les conditions de surface libre (2) sont intégrées en temps grâce à un développement en séries de Taylor au second ordre exprimées en fonction du pas de temps Δt et des dérivées temporelles lagrangiennes de ϕ et r . Les termes du second ordre sont exprimés en dérivant de façon lagrangienne les équations (2) et calculés en résolvant une seconde BIE portant sur $(\partial\phi/\partial t, \partial^2\phi/\partial t\partial n)$ dont les conditions aux limites sont formulées à partir de la solution de la première BIE. Les expressions détaillées des séries de Taylor sont données dans GRILLI (1997).

Ce canal à houle numérique a été modifié pour prendre en compte la présence d'un corps rigide complètement immergé sous la surface libre. Deux situations sont envisagées : (i) le cas d'un corps en mouvement forcé (qui comprend le cas du corps fixe) ; et (ii) le cas du corps en mouvement "libre" (sous l'effet de divers efforts).

2.2 Corps en mouvement forcé

Lorsque le corps décrit un mouvement imposé, on impose à sa frontière une condition de Neumann sur le flux normal du potentiel :

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \underline{\dot{\alpha}} \cdot \underline{n} \quad \text{sur } \Gamma_c(t) \quad (4)$$

où $\underline{\dot{\alpha}}$ désigne le vecteur vitesse des nœuds à la frontière du corps, connu dans le cas d'un mouvement imposé. Puisqu'un second problème de Laplace est résolu pour $(\partial\phi/\partial t, \partial^2\phi/\partial t\partial n)$, une condition supplémentaire doit être imposée pour calculer $\partial\phi/\partial t$. A l'instar de COINTE (1989), VAN DAALEN (1993) et TANIZAWA (1995), une condition de Neumann portant sur $\partial^2\phi/\partial t\partial n$ est imposée à la frontière du corps :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial n} = \underline{\ddot{\alpha}} \cdot \underline{n} + \dot{\theta} \left(\underline{\dot{\alpha}} \cdot \underline{s} - \frac{\partial\phi}{\partial s} \right) - \left(\frac{1}{R} \frac{\partial\phi}{\partial s} + \frac{\partial^2\phi}{\partial s\partial n} \right) \underline{\dot{\alpha}} \cdot \underline{s} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) \underline{\dot{\alpha}} \cdot \underline{n} \quad \text{sur } \Gamma_c(t) \quad (5)$$

$\underline{\ddot{\alpha}}$ et $\dot{\theta}$ sont respectivement l'accélération solide du point à la frontière du corps et la vitesse de rotation du corps. $1/R$ est la courbure locale de la frontière, et \underline{s} et \underline{n} sont les vecteurs localement normal et tangent à $\Gamma_c(t)$. Les équations (4) et (5) sont semblables aux conditions imposées pour la génération de vagues par un batteur plan (GRILLI & HORRILLO, 1997 ; GRILLI, 1997).

2.3 Corps en mouvement "libre"

Lorsqu'aucun mouvement du corps n'est prescrit, on parle de corps en mouvement "libre". Dans ce cas, l'accélération $\underline{\ddot{\alpha}}$ est une inconnue du problème et l'équation (5) ne peut être utilisée comme condition de Neumann pour résoudre le problème sur $\partial\phi/\partial t$. De plus, la vitesse $\underline{\dot{\alpha}}$ dans l'équation (4) doit être calculée en tant que solution du problème couplé fluide-structure.

Si l'on considère un corps quelconque rigide de masse M et de moment d'inertie I par rapport à son centre d'inertie, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} M \underline{\ddot{x}} = \oint_{\Gamma_c} p \underline{n} d\Gamma_c + M \underline{g} + \underline{F}_{ext} \\ I \ddot{\theta} \underline{e}_y = - \oint_{\Gamma_c} p (\underline{r} \times \underline{n}) d\Gamma_c + \underline{M}_{ext} \end{cases} \quad (6)$$

$\underline{\ddot{x}}$ désigne l'accélération du centre d'inertie, $\ddot{\theta}$ l'accélération angulaire du solide par rapport au centre d'inertie, \underline{F}_{ext} est un terme pouvant représenter des efforts extérieurs agissant sur la structure (ancrage, effort d'extraction de l'énergie des vagues, etc.), \underline{r} est le vecteur position du point d'intégration par rapport au centre d'inertie et \underline{e}_y est le vecteur normal au plan (x, z) , défini par $\underline{e}_y = \underline{e}_z \times \underline{e}_x$. Enfin la pression p agissant sur le corps est donnée par la relation (non-linéaire) de Bernoulli :

$$p = -\rho \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\phi \cdot \nabla\phi + gz \right) \quad (7)$$

Le calcul de la pression est rendu délicat par le fait que le terme $\partial\phi/\partial t$ est inconnu le long de $\Gamma_c(t)$. Par ailleurs, dans le problème de Laplace sur $\partial\phi/\partial t$, la condition de Neumann (5) sur le corps est également inconnue. Plusieurs auteurs ont proposé des méthodes pour surmonter cette difficulté : (i) une méthode de décomposition des modes (VINJE & BREVIG, 1981), (ii) une méthode itérative (SEN, 1993 ; CAO *et al.*, 1994), (iii) une méthode indirecte (WU & EATOCK-TAYLOR, 1996) et (iv) une méthode implicite (VAN DAALEN, 1993 ; TANIZAWA, 1995). Cette dernière a été choisie pour notre modèle car elle ne nécessite aucune sous-itération et aucun potentiel "artificiel" n'est à introduire. Cette méthode utilise les équations (5), (6) et (7) pour en déduire une nouvelle équation intégrale, sous la forme :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t \partial n}(\underline{x}) + \oint_{\Gamma_c} K(\underline{x}, \underline{\xi}) \frac{\partial\phi}{\partial t} d\Gamma_c(\underline{\xi}) = \gamma(\underline{x}) \quad (8)$$

Cette équation est alors discrétisée par la méthode des éléments de frontière ; la matrice K est régulière, symétrique et ne dépend que de la géométrie du corps. La fonction γ est

également calculée explicitement à chaque itération. Après avoir résolu le premier problème de Laplace sur le potentiel, l'équation (8) est ajoutée au système matriciel du problème sur $\partial\phi/\partial t$ de façon à avoir autant d'équations que d'inconnues. Ce second système matriciel est résolu par une méthode de décomposition LU basée sur la technique de Khaletski. Après avoir calculé la pression (Eq. 7), les équations du mouvement (Eq. 6) sont intégrées en temps et fournissent la position et la vitesse du corps au pas de temps suivant. Plusieurs schémas d'intégration ont été comparés sur des cas simples d'oscillateurs mécaniques avec amortissement, et le schéma de Newmark a été retenu :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_{n+1} = \dot{\underline{x}}_n + \Delta t((1-\gamma)\ddot{\underline{x}}_n + \gamma\ddot{\underline{x}}_{n+1}) \\ \underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n + \Delta t\dot{\underline{x}}_n + \Delta t^2\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{\underline{x}}_n + \beta\ddot{\underline{x}}_{n+1} \end{cases} \quad (9)$$

Le choix s'est porté sur les paramètres $\gamma=1/2$ et $\beta=1/4$ correspondant à la méthode dite de l'accélération moyenne, ce qui en fait un schéma d'ordre 2 en temps et inconditionnellement stable, au moins pour les systèmes à dynamique linéaire. Etant donné que ce schéma est implicite ($\ddot{\underline{x}}_{n+1}$ est inconnue en début de pas de temps), des itérations sont nécessaires. Nous avons utilisé comme valeur initiale une extrapolation polynomiale en temps à partir des valeurs des quantités inconnues aux cinq pas de temps précédents. Avec ce choix, quelques itérations seulement sont nécessaires pour converger (*i.e.* 1 à 3 itérations, dans nos simulations).

En pratique, le pas de temps Δt est imposé par le solveur hydrodynamique et mis à jour à chaque itération en fonction d'un nombre de Courant optimal C_0 (de l'ordre de 0,45) et de la distance minimale entre deux nœuds voisins de la surface libre Δr_{\min} :

$$\Delta t = C_0 \frac{\Delta r_{\min}}{\sqrt{gd}} \quad (10)$$

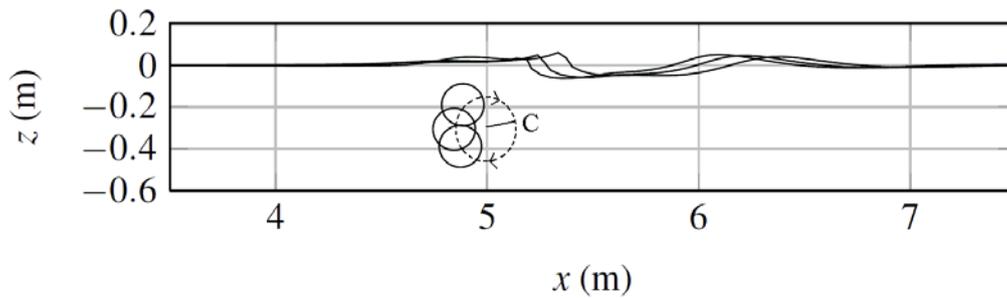
où d est la profondeur d'eau locale. Plus d'informations sur la stabilité et la convergence du schéma en temps utilisé pour le solveur hydrodynamique sont données dans GRILLI (1997).

3. Cas du cylindre en mouvement imposé

Le problème de radiation créée par les mouvements de grande amplitude d'un cylindre immergé dans un fluide infini à surface libre initialement au repos a été traité de façon analytique par WU (1993). Ce dernier n'effectue aucune approximation sur la condition au niveau du corps, mais utilise des conditions de surface libre linéarisées. Wu formule la solution sur le potentiel à l'aide d'un développement en multipôles sphériques généralisés et calcule les efforts hydrodynamiques exercés sur un cylindre de rayon R en mouvement de rotation circulaire dans le sens horaire et d'orbite de rayon C . Il considère un seul nombre d'onde $kR=0,5$ et 8 orbites adimensionnées C/R . Le nombre d'onde des vagues générées par le cylindre est relié à la fréquence du mouvement

circulaire par la relation de dispersion linéaire en profondeur infinie $k=\omega^2/g$. Wu démontre qu'à partir d'une surface libre au repos, les vagues ne sont générées que vers la droite du canal, ce qui est confirmé par nos simulations (Fig. 2).

Les simulations ont été réalisées dans un canal de longueur $L=20$ m et de profondeur $d=3$ m, avec une plage absorbante sur les 7 derniers mètres. Un cylindre de rayon $R=0,1$ m est placé à 5 m de la frontière gauche, à $z_c=-3R$ sous la surface libre au repos. Le cylindre est alors mis en mouvement de façon progressive sur 4 périodes de rotation (afin d'éviter les instabilités liées à un démarrage impulsif) pour finalement se placer sur une orbite circulaire avec une vitesse angulaire ω . L'hypothèse de profondeur infinie faite par Wu est bien vérifiée dans nos simulations avec $kd=5$. On a utilisé 200 nœuds sur la surface libre et 80 sur le corps. Les simulations durent 15 périodes de rotation.



*Figure 2. Position du cylindre et de la surface libre à 3 instants successifs
($t/T=4,40$; $t/T=4,49$; $t/T=4,62$).*

De façon similaire à Wu, on décompose les efforts vertical et horizontal adimensionnés en séries de Fourier sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{F_x}{C\rho\pi R^2 \omega^2} = F_x^{(0)} + \sum_{n \geq 1} F_x^{(n)} \cos(n\omega t + \varphi_n) \\ \frac{F_z}{C\rho\pi R^2 \omega^2} = F_z^{(0)} + \sum_{n \geq 1} F_z^{(n)} \sin(n\omega t + \varphi_n) \end{cases} \quad (11)$$

Les figures 3a, 3b et 3c comparent la composante moyenne ainsi que les amplitudes des deux premiers harmoniques des forces adimensionnées aux résultats de WU (1993) pour les 8 amplitudes de mouvement.

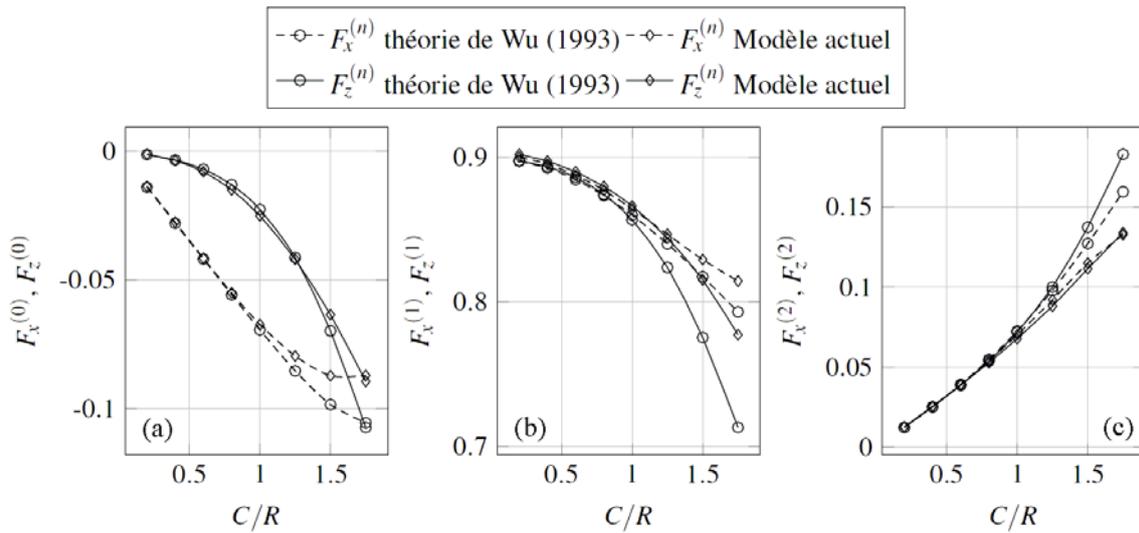


Figure 3. Moyenne (a), amplitude du 1^{er} harmonique (b) et du 2nd harmonique (c) des forces horizontale et verticale adimensionnées en fonction du rayon orbital adimensionné C/R , comparés aux résultats de la théorie de WU (1993).

Ces figures montrent un bon accord avec la théorie de WU (1993) pour les amplitudes relativement faibles ($C/R < 1$). Au-delà le cylindre se rapproche de façon significative de la surface libre et les effets non-linéaires ne sont alors plus négligeables, comme le montre la figure 4 sur les forces verticale et horizontale simulées.

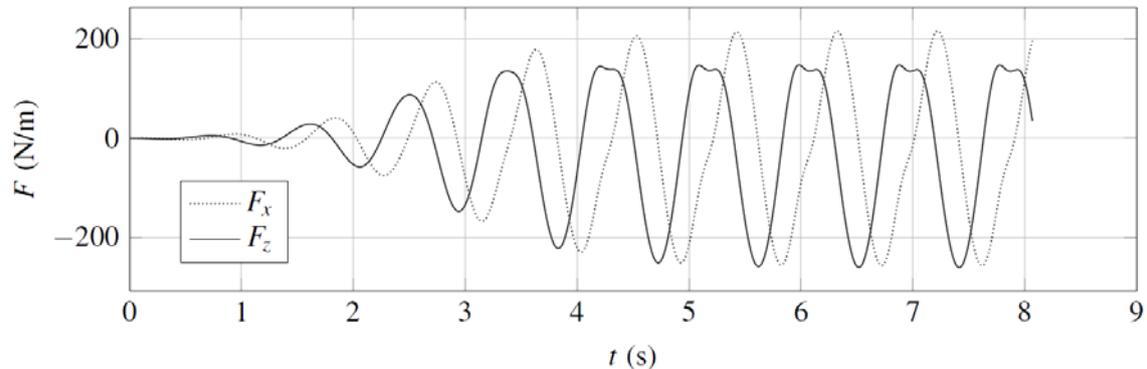


Figure 4. Forces verticale et horizontale simulées, $kR=0,5$, $C/R=1,75$.

Des résultats obtenus par la méthode HOS (KENT & CHOI, 2007) ont également été comparés à ceux de Wu, malheureusement pour des rayons orbitaux inférieurs à $C/R=0,6$, amplitude à laquelle les effets non-linéaires n'apparaissent pas clairement.

4. Cas du cylindre en mouvement "libre"

Nous avons vu précédemment qu'un cylindre immergé décrivant un mouvement orbital circulaire se comporte comme un générateur de vagues unidirectionnel. Inversement, il est possible d'imaginer qu'un cylindre immergé placé dans un champ de vagues et

convenablement ancré au fond ou à une structure fixe par un système de ressorts et d'amortisseurs pourrait absorber efficacement l'énergie des vagues, et potentiellement constituer un SREV. Cette idée a été introduite et étudiée dans les années 1980, via le "Cylindre de Bristol" (EVANS *et al.*, 1979). La théorie au 1^{er} ordre (linéaire) développée par Evans *et al.* sert de point de comparaison à nos simulations. On considère ici le mouvement d'un cylindre immergé sous l'action de vagues périodiques. L'équation du mouvement d'un tel cylindre de masse M par unité de longueur, à la position \underline{x} à l'instant t partant d'une position d'équilibre \underline{x}_{ini} s'écrit dans ce cadre :

$$M \ddot{\underline{x}} = \underline{F}_h + M \underline{g} - d_0 \dot{\underline{x}} - k_0 (\underline{x} - \underline{x}_{ini}) \quad (12)$$

\underline{F}_h représente les efforts hydrodynamiques induits par les vagues et (k_0, d_0) sont respectivement la raideur et le coefficient d'amortissement, pris égaux dans les directions x et z , et calculés en fonction d'une pulsation de réglage $\omega_0 = 2\pi f_0$, pour laquelle la puissance absorbée est maximale (EVANS *et al.*, 1979) :

$$\begin{cases} k_0 = (M + a_{ii}(\omega_0))\omega_0^2 \\ d_0 = b_{ii}(\omega_0) \end{cases} \quad (13)$$

où $a_{ii}(\omega_0)$ et $b_{ii}(\omega_0)$ sont respectivement la masse ajoutée (linéaire) et le coefficient d'amortissement de radiation du cylindre, à la fréquence de réglage. EVANS *et al.* (1979) montrent que, sous ces conditions, le cylindre décrit un cercle de rayon C sous l'action d'une houle linéaire d'amplitude A et de pulsation ω :

$$\left(\frac{C}{A}\right)^2 = \frac{\rho g^2 b_{ii}(\omega)}{\omega^3 \left\{ (d_0 + b_{ii}(\omega))^2 + \frac{1}{\omega^2} [k_0 - (M + a_{ii}(\omega))\omega^2]^2 \right\}} \quad (14)$$

La configuration utilisée par Evans *et al.* est reproduite dans nos simulations : un cylindre de rayon $R=0,05$ m, réglé à la fréquence $f_0=1,65$ Hz, est placé à la cote initiale $z_c=-0,0625$ m sous la surface libre au repos dans un canal de longueur 20 m et de profondeur 0,60 m, avec une plage absorbante sur les 7 derniers mètres. Des vagues monochromatiques de faible amplitude ($A/R=0,0033$) sont générées avec 8 fréquences différentes réparties entre 1 Hz et 2 Hz.

Après un état transitoire, le centre du cylindre décrit une trajectoire quasi-circulaire, stable dans le temps, représentée sur la figure 5a (cas $f=f_0$, soit $kR=0,55$). Ce type de trajectoire est observé pour les 8 fréquences considérées. La figure 5b montre l'évolution du rayon de la trajectoire C (adimensionné par le rayon du cylindre R) en fonction de kR , en comparaison à la théorie linéaire d'EVANS *et al.* (1979). Le rayon calculé dans les simulations numériques est légèrement plus faible que le rayon prédit par la théorie linéaire, ce qui est sans doute lié à des effets non-linéaires (en cours d'analyse actuellement).

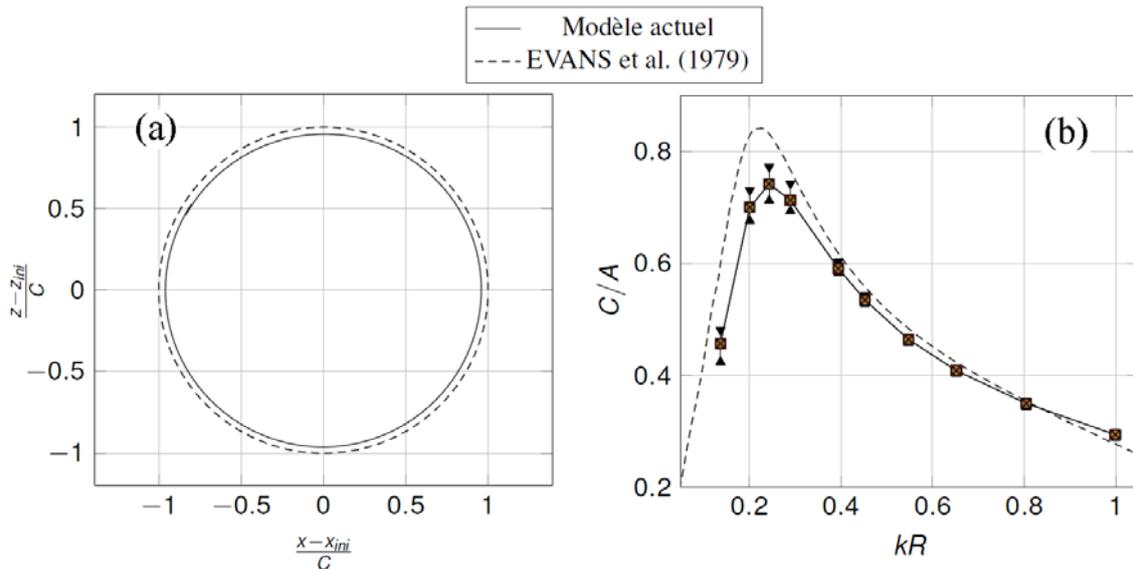


Figure 5. (a) Trajectoire du centre d'inertie du cylindre réglé à la fréquence $f_0=1,65$ Hz sur une période de vague (cas $f=f_0$, soit $kR=0,55$)
 (b) Evolution du rayon de la trajectoire pour différentes fréquences de vague. La fréquence de réglage correspond à $kR=0,55$. Les symboles font référence aux rayons minimum, moyen et maximum simulés sur une période de vague.

Ce premier cas-test confirme la capacité du modèle à simuler la dynamique d'un corps "libre" soumis à l'action des vagues. Il s'agit également d'une première application du modèle à un cas réaliste, en vue de modéliser la dynamique de SREV immergés.

5. Conclusions et perspectives de développement

Le modèle numérique utilisé, à savoir un canal à houle numérique bidimensionnel, fondé sur un modèle potentiel complètement non-linéaire, a été présenté. Le problème du couplage hydro-mécanique, lié à la présence d'un corps cylindrique totalement immergé en mouvement imposé ou "libre", a été formulé de façon mathématique et résolu de façon numérique par la méthode implicite de VAN DAALEN (1993) et TANIZAWA (1995). Les résultats du modèle ont ensuite été comparés à la théorie de WU (1993) pour le cas d'un cylindre en mouvement imposé, et à la théorie linéaire d'EVANS *et al.* (1979) pour le cas d'un cylindre en mouvement "libre" (avec ressort et amortissement dans les directions horizontale et verticale), représentant un SREV idéalisé.

Les travaux actuels concernent l'extension du modèle pour simuler des états de mer irréguliers (définis par un spectre de variance donné), l'examen de la possibilité de tenir compte des effets visqueux à l'aide d'un terme de force supplémentaire, et le traitement de cas de SREV plus réalistes, avant de procéder ensuite à une extension du modèle à la simulation du problème 3D.

6. Références bibliographiques

- CAO Y., BECK R.F., SCHULTZ W.W. (1994). *Nonlinear Computation of Wave Loads and Motions of Floating Bodies in Incident Waves*. Proc. 9th Int. Workshop Water Waves Floating Bodies, Kuju, Oita, Japan.
- CHAPLIN J.R. (1984). *Nonlinear Forces on a Horizontal Cylinder Beneath Waves*. J. Fluid Mech., 147, pp 449-464. doi:10.1017/S0022112084002160
- COINTE R. (1989). *Quelques aspects de la simulation numérique d'un canal à houle*. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 284 p.
- EVANS D.V., JEFFREY D.C., SALTER S.H., TAYLOR J.R.M. (1979). *Submerged cylinder wave energy device: theory and experiment*. Applied Ocean Res., 1(1), pp 3-12. doi:10.1016/0141-1187(79)90003-8
- GRILLI S.T. (1997). *Fully Nonlinear Potential Flow Models used for Long Wave Runup Prediction: Chapter in "Long-Wave Runup Models"*. World Scientific Publishing, Singapore, pp 116-180.
- GRILLI S.T., HERRILLO J. (1997). *Numerical Generation and Absorption of Fully Nonlinear Periodic Waves*. J. Eng. Mech., 123(10), pp 1060-1069. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:10(1060)
- GRILLI S.T., SUBRAMANYA R. (1996). *Numerical Modeling of Wave Breaking Induced by Fixed or Moving Boundaries*. Comp. Mech., 17(6), pp 374-391. doi:10.1007/BF00363981
- KENT C.P., CHOI W. (2007). *An Explicit Formulation for the Evolution of Nonlinear Surface Waves Interacting with a Submerged Body*. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 55, pp 1019-1038. doi:10.1002/flid.1504
- MANN L.D., BURNS A.R., OTTAVIANO M.E. (2007). *CETO: a Carbon Free Wave Power Energy Provider of the Future*. Proc. 7th European Wave and Tidal Energy Conference, Porto, Portugal.
- SEN D. (1993). *Numerical Simulation of Motions of Two-Dimensional Floating Bodies*. J. Ship Res., 37(4), pp 307-330.
- TANIZAWA K. (1995). *A Nonlinear Simulation Method of 3D Body Motions in Waves, 1st Report*. J. Soc. Nav. Arch. Japan, 178, pp 179-191.
- VAN DAALEN E.F.G. (1993). *Numerical and Theoretical Studies of Water Waves and Floating Bodies*. PhD Thesis, University of Twente, The Netherlands, 267 p.
- VINJE T., BREVIG P. (1981). *Nonlinear, Two-Dimensional Ship Motions*. Norwegian Institute of Technology, Report R-112.81.
- WU G.X. (1993). *Hydrodynamic Forces on a Submerged Circular Cylinder Undergoing Large-Amplitude Motion*. J. Fluid Mech., 254, pp 41-58. doi:10.1017/S0022112093002022

2.12 : *Revue Paralia – Vol. 4 (2011)*

WU G.X., EATOCK-TAYLOR R. (1996). *Transient Motion of a Floating Body in Steep Water Waves*. Proc. 11th Int. Workshop Water Waves Floating Bodies, Hamburg, Germany.

Nonlinear modelling of interaction of waves with a moving submerged body

Etienne GUERBER¹, Michel BENOIT¹, Stephan GRILLI², Clément BUVAT¹

1. Saint-Venant Laboratory for Hydraulics, Université Paris-Est,
(joint research unit between EDF R&D, CETMEF and Ecole des Ponts ParisTech),
6 quai Watier, 78400 Chatou, France.

etienne.guerber@edf.fr ; michel.benoit@edf.fr ; clement.buvat@edf.fr

2. Department of Ocean Engineering, University of Rhode Island,
Narragansett, RI 02882, USA.

grilli@oce.uri.edu

Abstract:

The work presented herein relates to the development of an advanced simulation code allowing a description of the motion of a submerged body under the action of waves, including large oscillations. The long-term goal of this tool is to model the behaviour of certain types of submerged Wave Energy Recovery Systems (WERS).

In this study a potential flow approach was adopted to describe the hydrodynamic part, limited to 2DV (i.e. in the vertical plane), corresponding to the case of a numerical wave tank. The model used to generate and propagate waves is a fully nonlinear potential flow model, based on a high-order boundary element method developed by Grilli and his colleagues over the past 20 years. This model, which has already been largely validated for a number of different oceanic and coastal applications, has been modified to take into account the presence of either a fixed or moving rigid submerged body, by including the computation of the hydrodynamic forces acting on the body. A specific methodology has been developed to solve for the coupled hydrodynamic-mechanical problem.

Two validation cases are presented and results of the numerical model are compared to those of other mathematical models: (i) the analytical theory by WU (1993), for a cylinder in a prescribed circular motion; and (ii) the linear theory by EVANS et al. (1979), for the case of a cylinder submitted to external forces (spring-like force and forces related to wave-energy extraction, ...) in addition to hydrodynamic forces.

Keywords:

Waves – Numerical wave tank – Fluid-structure interaction – Wave Energy Converters (WEC)

Received 30 November 2010, accepted 9 February 2011, available online 21 March 2011.

Translated version not certified, published under the responsibility of the article authors.

1. Introduction

Over the past few years, there has been a marked resurgence of interest in marine renewable energy, in particular wave energy, with the development and testing of a number of different WECs. Amongst the different technologies proposed, are the "point absorber" type WECs that use the oscillating motion of floating or submerged bodies under the impact of propagating waves. These bodies are often submerged at minimal depth below the water surface and undergo large amplitude oscillatory motions (for example, the CETO system, MANN *et al.*, 2007). As a result, models based on the hypothesis of small amplitude motion and/or a linearised free surface are not adapted to the simulation of the coupled hydrodynamic-body dynamic system. The work presented herein consists in the development of a numerical model capable of nonlinear wave-body interaction computations in two dimensional space (2DV), which can then be applied for modelling WECs dynamics in real sea states (irregular waves).

A first step in this project consists of solving the coupled nonlinear problem for the case of a submerged horizontal cylinder. The principal characteristics of the numerical model developed are presented hereafter, as well as the two validation cases for a submerged cylinder of circular section, the first case being for prescribed motion and the second for "free" motion under the effect of several forces.

The calculation of nonlinear interactions between waves and a cylindrical body has been a subject of interest for numerous authors. For instance, CHAPLIN (1984) carried out a series of tests in a wave tank, specifically measuring the influence of the Keulegan-Carpenter (K_C) number on the hydrodynamic forces exercised on the body. More recently, WU (1993) adopted an analytic approach to calculate the hydrodynamic forces exercised on a cylinder undergoing large-amplitude motions, using linearised free surface conditions and body boundary conditions satisfied on its instantaneous position. The work of these two authors has been widely used to validate a number of numerical models, such as the Sindbad model (COINTE, 1989) based on the Boundary Element Method (BEM), or again the model developed by KENT & CHOI (2007) employing a High-Order Spectral method (HOS).

2. Mathematical formulation of the coupled problem

2.1 Outline of the model

We make use of a *Numerical Wave Tank* (NWT) based on a *Fully Nonlinear Potential Flow* (FNPF) model, applied to the computation of nonlinear interactions (hydrodynamic forces and induced motion) between the wave-induced flow and a submerged body representing a vertical cross-section of a WEC moored on the sea bottom. This is an extension of the model developed over the last 20 years by Grilli and co-workers (GRILLI & SUBRAMANYA, 1996; GRILLI, 1997; GRILLI & HERRILLO, 1997). The equations of the model are briefly presented hereafter (for

additional details, please refer to the above mentioned references). The velocity potential $\phi(x, t)$ is used to represent a flow, which is assumed to be irrotational and incompressible, in the vertical plane (x, z) , and the velocity field is denoted as $\underline{u} = \nabla\phi = (u, w)$.

The continuity equation over the closed fluid domain $\Omega(t)$, with boundaries $\Gamma(t)$, reads as a Laplace equation for the potential (see Fig. 1 for a definition sketch of the computational domain):

$$\nabla^2\phi = 0 \quad \text{on } \Omega(t) \quad (1)$$

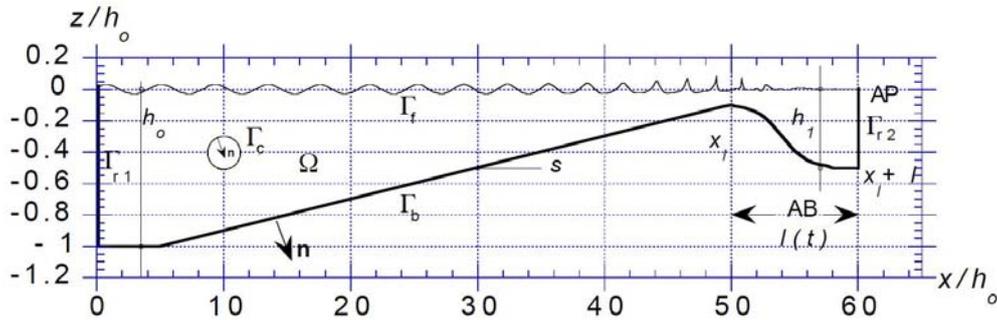


Figure 1. Sketch of the computational domain $\Omega(t)$ and associated boundaries.

On the (time varying) free surface $\Gamma_f(t)$, the potential satisfies the kinematic and dynamic free surface boundary conditions:

$$\begin{cases} \frac{D\underline{r}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u}\nabla\right)\underline{r} = \underline{u} = \nabla\phi \\ \frac{D\phi}{Dt} = -gz + \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi + \frac{p_a}{\rho} \end{cases} \quad \text{on } \Gamma_f(t) \quad (2)$$

respectively, with \underline{r} being the position vector of a point on the free surface, g the acceleration of gravity, p_a the atmospheric pressure and ρ the fluid density. At the bottom, assumed to be steady, a slip condition is imposed:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_b \quad (3)$$

\underline{n} stands for the normal unit vector at the boundary, pointing outwards of the fluid domain.

On the left lateral boundary of the domain $\Gamma_{r1}(t)$, periodic or irregular waves can be generated through the motion of a flap-type or piston-type plane wavemaker. It is also possible to use an exact computational method for wave profile and kinematics based on the Stream Function approach. At the right lateral boundary of the domain, an absorbing beach (AB) is implemented in order to reduce the reflection of waves on the boundary $\Gamma_{r2}(t)$. More information on the generation and absorption of waves in the model are available in GRILLI & HORRILLO (1997). On the boundary of the submerged body $\Gamma_c(t)$, a specific condition is imposed, which is described in the next section.

Equation (1) is transformed into a Boundary Integral Equation (BIE) by applying Green's second identity; it is further solved by the Boundary Element Method (BEM). The BIE is thus evaluated at N nodes on the boundary and M higher-order elements are defined to interpolate in between discretization nodes. In the following, quadratic isoparametric elements are used on lateral and bottom boundaries. Isoparametric linear elements are used on the body boundary and cubic elements on the free surface in order to ensure continuity of the boundary slope. In these latter elements, referred to as Mixed Cubic Interpolation (MCI) elements, geometry is modelled by cubic splines and field variables are interpolated between each pair of nodes, using the mid-section of a four-node "sliding" isoparametric element. Expressions of the various integrals over the elements (regular, singular and quasi-singular) are given in GRILLI & SUBRAMANYA (1996).

The free surface boundary conditions (2) are marched in time by using second-order Taylor series, in which appear the time step Δt and the Lagrangian time derivatives of ϕ and \underline{r} . Second order terms are obtained from the Lagrangian time differentiation of equations (2), and computed by solving a second BIE on $(\partial\phi/\partial t, \partial^2\phi/\partial t\partial n)$, whose boundary conditions are formulated by using the results from the first BIE. Detailed expressions of these Taylor series are given in GRILLI (1997).

This numerical wave tank has been modified to include a rigid body, fully submerged under the free surface. Two situations are considered: (i) the case of a body in forced (prescribed) motion (which includes the case of a fixed body); and (ii) the case of a "freely" moving body (under the actions of the various forces exerted on it).

2.2 Body in prescribed motion

When the motion of the body is prescribed, a Neumann-type condition is imposed on the body boundary for the normal flux of the potential:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \underline{\dot{\alpha}} \cdot \underline{n} \quad \text{on } \Gamma_c(t) \quad (4)$$

where $\underline{\dot{\alpha}}$ stands for the velocity vector of a node on the body boundary, which is known in this case of forced motion. As a second Laplace problem is solved for $(\partial\phi/\partial t, \partial^2\phi/\partial t\partial n)$, an additional condition has to be specified to compute $\partial\phi/\partial t$. Following COINTE (1989), VAN DAALEN (1993) and TANIZAWA (1995), a Neumann-type condition on $\partial^2\phi/\partial t\partial n$ is imposed on the body boundary:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial n} = \underline{\ddot{\alpha}} \cdot \underline{n} + \dot{\theta} \left(\underline{\dot{\alpha}} \cdot \underline{s} - \frac{\partial\phi}{\partial s} \right) - \left(\frac{1}{R} \frac{\partial\phi}{\partial s} + \frac{\partial^2\phi}{\partial s\partial n} \right) \underline{\dot{\alpha}} \cdot \underline{s} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) \underline{\dot{\alpha}} \cdot \underline{n} \quad \text{on } \Gamma_c(t) \quad (5)$$

where $\underline{\ddot{\alpha}}$ and $\dot{\theta}$ are the solid acceleration of the node on the body boundary and the rotation velocity of the body, respectively; $1/R$ is the local curvature of the body boundary, and \underline{s} and \underline{n} are the unit vectors, respectively, normal and tangent at the boundary $\Gamma_c(t)$. Equations (4) and (5) are similar to the boundary conditions used for

the generation of waves by a plane wavemaker (GRILLI & HORRILLO, 1997; GRILLI, 1997).

2.3 Body in "free" motion

When no motion is imposed to the body, the problem is referred to as a *freely-moving body* problem. In this case, the acceleration $\underline{\ddot{x}}$ is unknown, and equation (5) cannot directly be used as a boundary condition to solve the Laplace problem for $\partial\phi/\partial t$. Furthermore, the velocity $\underline{\dot{x}}$ in equation (4) needs to be solved as part of a coupled fluid-structure problem.

Considering a rigid body of mass M and mass moment of inertia I about its centre of mass, the dynamic equations governing the body motion read:

$$\begin{cases} M \underline{\ddot{x}} = \oint_{\Gamma_c} p \underline{n} d\Gamma_c + M \underline{g} + \underline{F}_{ext} \\ I \ddot{\theta} \underline{e}_y = - \oint_{\Gamma_c} p (\underline{r} \times \underline{n}) d\Gamma_c + \underline{M}_{ext} \end{cases} \quad (6)$$

where $\underline{\ddot{x}}$ is the acceleration of the body centre of mass, $\ddot{\theta}$ is the angular acceleration of the solid body about the centre of mass, \underline{F}_{ext} and \underline{M}_{ext} represent any kind of applied external force and momentum acting on the body (e.g. mooring, force modelling power take-off, etc.), \underline{r} is the position vector of a point on the body boundary with respect to the centre of mass, and \underline{e}_y is the unit vector normal to the plane (x, z) , and defined by $\underline{e}_y = \underline{e}_z \times \underline{e}_x$. Finally, the pressure p along the body boundary is given by the (nonlinear) Bernoulli equation:

$$p = -\rho \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\phi \cdot \nabla\phi + gz \right) \quad (7)$$

The computation of the pressure is rendered difficult, due to the fact that $\partial\phi/\partial t$ is unknown at any given time along $\Gamma_c(t)$. Furthermore, in the second Laplace problem on $\partial\phi/\partial t$, the Neumann condition (5) on the body boundary is unknown as well. Several authors have proposed methods to overcome this difficulty: (i) the mode decomposition method (VINJE & BREVIG, 1981); (ii) the iterative method (SEN, 1993; CAO *et al.*, 1994); (iii) the indirect method (WU & EATOCK-TAYLOR, 1996); and (iv) the implicit method (VAN DAALEN, 1993; TANIZAWA, 1995). The latter has been chosen here, as no iterations are required and there is no need to introduce any artificial potential. This method combines equations (5), (6) and (7) to derive a new Boundary Integral Equation of the following form:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t \partial n}(\underline{x}) + \oint_{\Gamma_c} K(\underline{x}, \underline{\xi}) \frac{\partial\phi}{\partial t} d\Gamma_c(\underline{\xi}) = \gamma(\underline{x}) \quad (8)$$

This equation is then discretized on the body boundary $\Gamma_c(t)$ using the BEM elements. The matrix K is regular, symmetric, and depends only upon the shape of the body. The function γ is explicitly evaluated at each iteration. After solving the first Laplace problem for the potential, equation (8) is added to the matrix equation of the problem

for $\partial\phi/\partial t$ so as to have as many equations as unknowns. This second linear system is solved with a LU decomposition scheme based on the direct elimination technique proposed by Khaletski. After having computed the pressure using equation (7), equations of body motion (6) are marched in time and provide the position and velocity of the body at the next time step. Various schemes have been compared on simple cases of mechanical oscillators with damping, and the Newmark scheme was retained:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_{n+1} = \dot{\underline{x}}_n + \Delta t((1-\gamma)\ddot{\underline{x}}_n + \gamma\ddot{\underline{x}}_{n+1}) \\ \underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n + \Delta t\dot{\underline{x}}_n + \Delta t^2\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{\underline{x}}_n + \beta\ddot{\underline{x}}_{n+1} \end{cases} \quad (9)$$

Parameters were selected as $\gamma = 1/2$ and $\beta = 1/4$, corresponding to the so-called mean acceleration method, which makes this scheme second order in time and unconditionally stable, at least for linear dynamical systems. As this scheme is implicit ($\ddot{\underline{x}}_{n+1}$ is unknown at the beginning of the time step), iterations are required. As initial values, we use time polynomial extrapolations based on the values of the unknown quantities at the fifth previous time steps. With this choice, few iterations are required to achieve convergence (*i.e.* 1 to 3 iterations, in these simulations).

The time step actually used is fixed by the hydrodynamic solver, and updated at each iteration as a function of an optimal Courant number C_0 (about 0.45) and the minimal distance between two adjacent nodes on the free surface Δr_{\min} :

$$\Delta t = C_0 \frac{\Delta r_{\min}}{\sqrt{gd}} \quad (10)$$

where d is the local water depth. More information on the stability and convergence of the temporal scheme used by the hydrodynamic solver is available in GRILLI (1997).

3. Case of a cylinder in prescribed motion

The radiation problem resulting from large amplitude motions of a cylinder submerged in a fluid of infinite depth, under a free surface initially at rest, was treated analytically by WU (1993). No approximations are made for the body boundary conditions; however, Wu uses linearised free surface conditions. He formulates the solution for the potential flow by way of an expansion into generalised spherical multi-poles and calculates the hydrodynamic forces exercised on a cylinder of radius R undergoing circular rotation in a clockwise direction and with an orbit of radius C . Wu takes into account a single wave number value $kR=0.5$ and 8 non-dimensional orbits C/R . The wave number of the waves generated by the cylinder is linked to the frequency of the circular motion by the infinite depth linear dispersion relation $k=\omega^2/g$. Wu demonstrated that, starting from a free surface at rest, waves are generated only towards the right of the flume; this was also confirmed by the simulations performed for this study (Fig. 2).

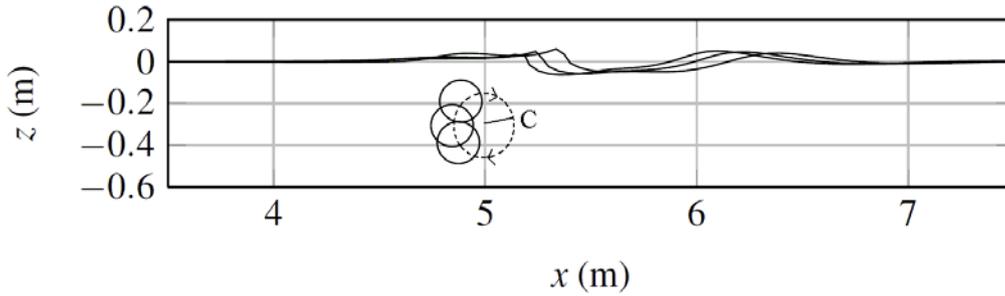


Figure 2. Position of the cylinder and the free surface at three successive time instants ($t/T=4.40$; $t/T=4.49$; $t/T=4.62$).

These simulations were performed in a wave canal of length $L=20$ m and depth $d=3$ m, with an absorbing beach installed over the last 7 metres. A cylinder of radius $R=0.1$ m is placed 5 m from the left boundary and at $z_c=-3R$ beneath the free surface at rest. The cylinder is then progressively put into motion over four rotation periods (in order to avoid instabilities linked to an abrupt start-up), to achieve a final circular orbit with an angular velocity ω . The infinite depth hypothesis proposed by Wu is clearly verified in these simulations with $kd=5$. In the BEM, 200 nodes over the free surface and 80 nodes over the body were used. The simulations covered 15 rotation periods.

Similar to Wu's analysis, the non-dimensional vertical and horizontal forces were decomposed in Fourier series, in the form:

$$\begin{cases} \frac{F_x}{C\rho\pi R^2 \omega^2} = F_x^{(0)} + \sum_{n \geq 1} F_x^{(n)} \cos(n\omega t + \varphi_n) \\ \frac{F_z}{C\rho\pi R^2 \omega^2} = F_z^{(0)} + \sum_{n \geq 1} F_z^{(n)} \sin(n\omega t + \varphi_n) \end{cases} \quad (11)$$

Figures 3a, 3b and 3c compare the mean values as well as the amplitudes of the first two harmonics of the non-dimensional force components to the WU (1993) results for the 8 different motion amplitudes.

These results show good agreement with WU's (1993) theoretical results in the case of relatively small amplitudes ($C/R < 1$). Above these amplitudes, there is a significant movement of the cylinder towards the free surface and non-linear effects are no longer negligible, as can be seen in figure 4, which shows the simulated vertical and horizontal forces.

The results obtained with the HOS method (KENT & CHOI, 2007) were also compared to Wu's results, unfortunately for orbital radii inferior to $C/R=0.6$, amplitude at which non-linear effects do not appear clearly.

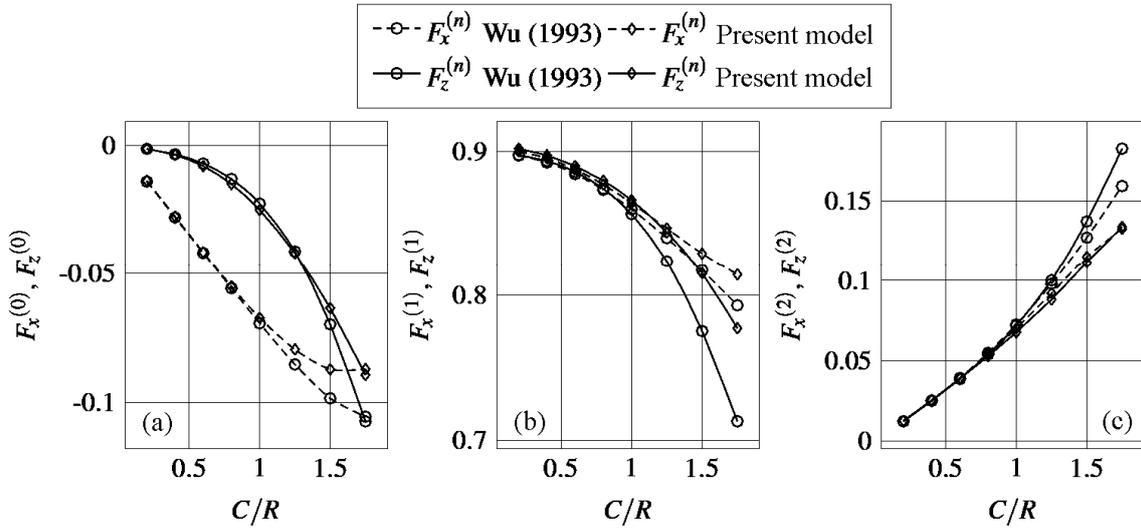


Figure 3. Mean value (a), amplitude of the 1st harmonic (b) and of the 2nd harmonic (c) of horizontal and vertical non-dimensional force components as a function of the non-dimensional orbital radius C/R , compared with results from theory by WU (1993).

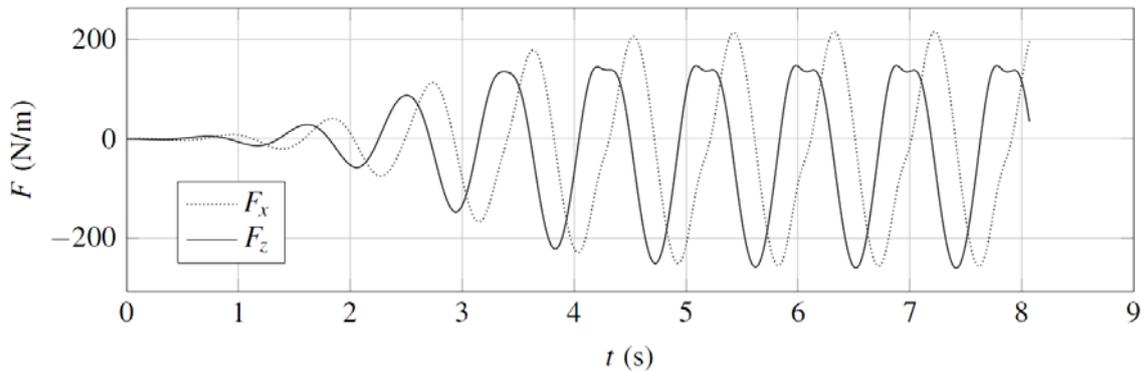


Figure 4. Vertical and horizontal forces, $kR=0.5$, $C/R=1.75$.

4. Case of cylinder in free motion

As seen in the previous section, a submerged cylinder undergoing forced circular motion acts as a unidirectional wavemaker. Conversely, it is envisageable that a submerged cylinder placed in a wave field and suitably constrained by anchors on the bottom or connected to a fixed structure using a spring/damper combination system could efficiently absorb wave energy, and could have the potential to act as a WEC. This idea was introduced and studied in the 1980s, and is known as the "Bristol cylinder" (EVANS *et al.*, 1979). The 1st order (linear) solution developed by Evans *et al.* is used as a comparison for the present simulations. Here, the motion of a submerged circular cylinder under regular waves is considered. The equation of motion of such a cylinder, assuming mass M per unit length, at position \underline{x} at time t starting from its initial resting position \underline{x}_{ini} , is governed by:

$$M \ddot{\underline{x}} = \underline{F}_h + M \underline{g} - d_0 \dot{\underline{x}} - k_0 (\underline{x} - \underline{x}_{ini}) \tag{12}$$

\underline{F}_h represents the hydrodynamic force induced by the waves, and (k_0, d_0) are the stiffness and damping constants, respectively, considered to be identical in the x and z directions, and computed for a given tuning angular frequency $\omega_0 = 2\pi f_0$, for which the power absorbed by the cylinder is maximal (EVANS *et al.*, 1979):

$$\begin{cases} k_0 = (M + a_{ii}(\omega_0))\omega_0^2 \\ d_0 = b_{ii}(\omega_0) \end{cases} \quad (13)$$

where $a_{ii}(\omega_0)$ and $b_{ii}(\omega_0)$ are the (linear) added mass and the radiation damping coefficient, respectively of the cylinder, at the tuning frequency. EVANS *et al.* (1979) showed that, under these conditions, the centre of the cylinder moves along a circle of radius C , when excited by linear monochromatic waves of amplitude A and angular frequency ω :

$$\left(\frac{C}{A}\right)^2 = \frac{\rho g^2 b_{ii}(\omega)}{\omega^3 \left\{ (d_0 + b_{ii}(\omega))^2 + \frac{1}{\omega^2} [k_0 - (M + a_{ii}(\omega))\omega^2]^2 \right\}} \quad (14)$$

The configuration used by Evans *et al.* is reproduced in the present simulations: a cylinder of radius $R=0.05$ m, tuned at the frequency $f_0=1.65$ Hz, is placed at the initial position $z_c=-0.0625$ m beneath the free surface at rest in a flume of length 20 m and depth 0.60 m, with an absorbing beach specified over the last 7 metres. Monochromatic waves with a very low amplitude ($A/R=0.0033$) are generated with 8 different frequencies ranging between 1 Hz and 2 Hz.

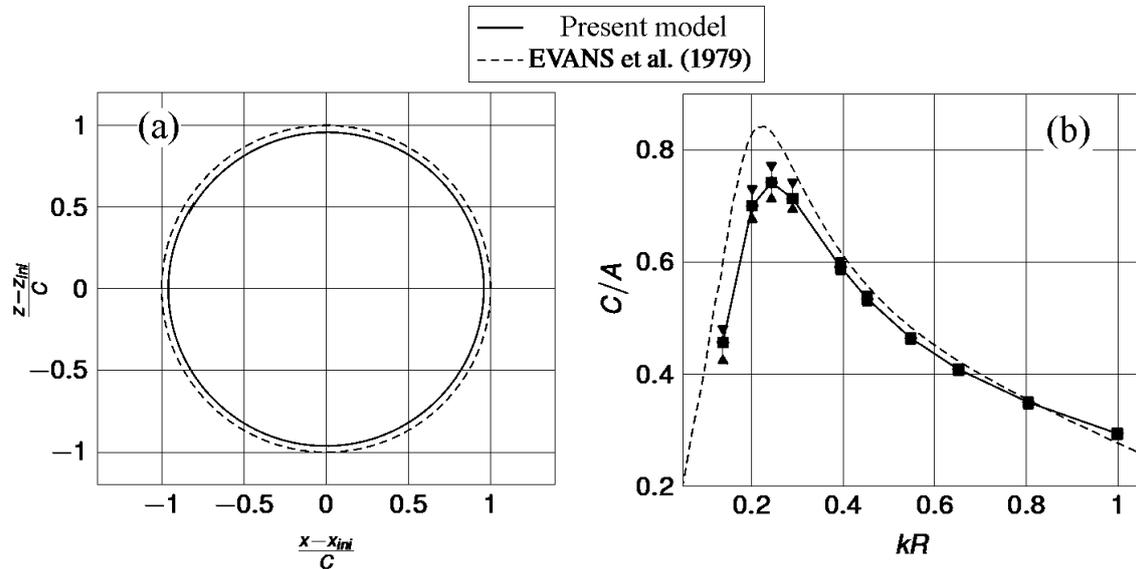


Figure 5. (a) Trajectory of the centre of mass of the cylinder tuned at the frequency $f_0=1.65$ Hz over a wave period (case $f=f_0$, i.e. $kR=0.55$)

(b) Evolution of the radius of the trajectory for different wave frequencies.

The tuning frequency corresponds to $kR=0.55$. Symbols refer to minimum, mean and maximum simulated radii over a wave period.

After a time transient period, the centre of the cylinder follows a quasi-circular and stable-in-time path, plotted in figure 5a (case $f=f_0$, i.e. $kR=0.55$). This form of trajectory is observed for the 8 considered frequencies. Figure 5b shows the evolution of the radius C of the trajectory (made non-dimensional by the radius R of the cylinder) as a function of kR , compared to the linear theory of EVANS *et al.* (1979). The computed radius is slightly less than the linear theory predicted radius; this is probably related to nonlinear effects (presently under consideration).

This first test-case confirms the ability of the model to simulate the dynamics of a body in free motion responding to wave action (and other forces). It is also the first application of the model to a realistic case, with the long-term goal of modelling the dynamics of submerged WEC systems.

5. Conclusions and outlook of future developments

The numerical model, namely a two-dimensional numerical wave tank based on a fully nonlinear potential flow theory, has been described. The coupled hydro-mechanical problem, related to the presence of a fully submerged cylindrical body either in prescribed or "free" motion, has been mathematically formulated and numerically solved by using the implicit method proposed by VAN DAALEN (1993) and TANIZAWA (1995). The numerical model results were then compared to WU's (1993) theoretical results for the case of a cylinder in prescribed motion, and to the linear theory solution of EVANS *et al.* (1979) for the "free" motion case (with spring and damping in the horizontal and vertical directions), representing a schematic WEC.

Ongoing work is currently devoted to the extension of the model to simulating irregular sea states (defined by a given energy density spectrum), namely the possibility of taking viscous effects into account through an appropriate additional force term, as well as the modelling of more realistic WEC systems. The model will then be extended to enable simulation of 3D problems.

6. References

CAO Y., BECK R.F., SCHULTZ W.W. (1994). *Nonlinear Computation of Wave Loads and Motions of Floating Bodies in Incident Waves*. Proc. 9th Int. Workshop Water Waves Floating Bodies, Kuju, Oita, Japan.

CHAPLIN J.R. (1984). *Nonlinear Forces on a Horizontal Cylinder Beneath Waves*. J. Fluid Mech., 147, pp 449-464. doi:10.1017/S0022112084002160

COINTE R. (1989). *Quelques aspects de la simulation numérique d'un canal à houle*. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 284 p. (in French)

EVANS D.V., JEFFREY D.C., SALTER S.H., TAYLOR J.R.M. (1979). *Submerged cylinder wave energy device: theory and experiment*. Applied Ocean Res., 1(1), pp 3-12. doi:10.1016/0141-1187(79)90003-8

- GRILLI S.T. (1997). *Fully Nonlinear Potential Flow Models used for Long Wave Runup Prediction: Chapter in "Long-Wave Runup Models"*. World Scientific Publishing, Singapore, pp 116-180.
- GRILLI S.T., HORRILLO J. (1997). *Numerical Generation and Absorption of Fully Nonlinear Periodic Waves*. *J. Eng. Mech.*, 123(10), pp 1060-1069. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:10(1060)
- GRILLI S.T., SUBRAMANYA R. (1996). *Numerical Modeling of Wave Breaking Induced by Fixed or Moving Boundaries*. *Comp. Mech.*, 17(6), pp 374-391. doi:10.1007/BF00363981
- KENT C.P., CHOI W. (2007). *An Explicit Formulation for the Evolution of Nonlinear Surface Waves Interacting with a Submerged Body*. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 55, pp 1019-1038. doi:10.1002/flid.1504
- MANN L.D., BURNS A.R., OTTAVIANO M.E. (2007). *CETO: a Carbon Free Wave Power Energy Provider of the Future*. Proc. 7th European Wave and Tidal Energy Conference, Porto, Portugal.
- SEN D. (1993). *Numerical Simulation of Motions of Two-Dimensional Floating Bodies*. *J. Ship Res.*, 37(4), pp 307-330.
- TANIZAWA K. (1995). *A Nonlinear Simulation Method of 3D Body Motions in Waves, 1st Report*. *J. Soc. Nav. Arch. Japan*, 178, pp 179-191.
- VAN DAALLEN E.F.G. (1993). *Numerical and Theoretical Studies of Water Waves and Floating Bodies*. PhD Thesis, University of Twente, The Netherlands, 267 p.
- VINJE T., BREVIG P. (1981). *Nonlinear, Two-Dimensional Ship Motions*. Norwegian Institute of Technology, Report R-112.81.
- WU G.X. (1993). *Hydrodynamic Forces on a Submerged Circular Cylinder Undergoing Large-Amplitude Motion*. *J. Fluid Mech.*, 254, pp 41-58. doi:10.1017/S0022112093002022
- WU G.X., EATOCK-TAYLOR R. (1996). *Transient Motion of a Floating Body in Steep Water Waves*. Proc. 11th Int. Workshop Water Waves Floating Bodies, Hamburg, Germany.

