

## 研究論文

船舶海洋技術, 第40號  
2005年 11月  
JOURNAL OF SHIPS &  
OCEAN ENGINEERING  
Vol.40 November 2005

### 3차원 비선형 자유표면유동의 수치해석을 위한 3차경계요소법의 정확도와 수렴성 고찰

성흥근\* · Grilli, S.T.\*\*

#### A Note on Accuracy and Convergence of a Third-order Boundary Element Method for Three Dimensional Nonlinear Free Surface Flows

*Hong Gun Sung\* · Stephan T. Grilli\*\**

#### Abstract

The present paper deals with the accuracy and convergence of the third-order boundary element method(BEM), which was originally developed by Grilli et al.(2000). There has been no sincere consideration on practical questions on such as the required number of node points for nonlinear water wave simulation with this BEM. We suggest a simple answer for this matter by taking a close look at the resulting errors for the linear wave potential function in a rectangular domain with flat and wavy top surface. According to the test computation, we revealed that the convergence rate is of the third-order, and that we are able to get the numerical error less than 1% for highly nonlinear waves by using 8 elements per a wavelength at least with the present third-order element. At the same time, we indicated that the dependency of CPU time upon the number of unknowns for the present BEM with the fast multipole algorithm(FMA). Conclusively, we have shown that the present BEM is accurate and convergent for three dimensional nonlinear water waves for the context of the mixed Dirichlet-Neumann problem.

#### 1. 서 론

경계요소법(BEM; Boundary Element Method)은 비선형 자유표면과 유동에 대한 효과적인 수치기법 중 하나로써 인식되고 있으며, Longuet-Higgins & Cokelet(1976)의 연구를 시작으로 Dommermuth & Yue(1987), Ferrant(1995, 1999), Sung et al.(2000), Grilli et al.(2001), Sung & Grilli(2005)와 같이 최근까지도 관심의 영역이 되고 있다.

고전적인 연구들에서는 주로 주기적인 유동과 물체가 없는 경우에 대한 해석이 대부분을 차지하였으며(Dommermuth et al. 1988, Grilli & Horrilo 1998), 최근에 이르러서는 비선형과와 물체와의 상호작용이 주요 연구영역이라고 할 수 있다.

고차경계요소법(HOBEM; Higher-Order BEM)은 Hess & Smith(1964) 이후 평면요소위에 상수 형태의 특이점 분포를 가정하는 일정패널법(CPM; Constant Panel Method)과 특이점의 선형적인

\* 해양시스템기술연구본부(Ocean Engineering Research Dept.)

\*\* University of Rhode Island, RI, USA

분포를 이용하는 기법(Ferrant 1995)과 대별하여 2차이상의 특이점 분포를 허용하는 경계요소법을 지칭한다. 고차경계요소법이라는 표현은 Boo(1993), Kim(1995)에서 처음 사용되기 시작한 것으로 보이며, 최근까지도 대체로 2차 요소면 상에 특이점의 2차분포를 가정하는 것이 주종을 이루었다(Sung et al. 2000). 사실상 이와 같은 연구는 선형 자유표면파 문제에 대한 홍사영(1994), 최윤락(1997)의 연구에서 사용한 기법과 요소는 동일하거나 유사하나, 적용 대상이 비선형파 문제라는 점에 차이가 있다.

경계면은 사각형의 결합으로 나타내고 미지수의 고차변화를 허용하는 이른바 고차패널법도 연구된 바 있다. 고차패널법을 이용하여 Romate(1989)는 비선형파의 전파 문제를 다루었고, Broeze(1993)는 해저지형의 변화에 의해 생성되는 비선형파의 생성 및 회절을 계산하였다.

한편, 3차 이상의 고차경계요소법으로는 스플라인(spline)을 활용하는 기법과, 일반적인 2차 요소 기법을 확장하여 적용한 3차경계요소법이 있다. 스플라인을 이용하는 방법은 Ortiz & Douglass(1993)와 Pelekasis et al.(1992)의 연구 등에서 나타난 바와 같이, 포텐셜과 그 미분치의 분포를 스플라인을 이용하여 내삽하고, 적절한 끝단 조건을 부과하는 방법을 사용한다.

3차경계요소법은 기존의 2차경계요소법에서 절점수와 해당하는 내삽함수의 차수를 올림으로써 구성할 수 있다. Grilli et al.(2001)의 3차경계요소법은 Grilli et al.(1989)이 처음으로 제안한 2차원 문제에 대한 3차경계요소법을 3차원 공간으로 확장하면서 역시 처음으로 완성된 바 있다.

본 연구에서는 Grilli et al.(2001) 등에 의한 3차경계요소법에 대하여 그간 충분히 검토되지 못한 부분인 정확도 및 수렴성에 대하여 해석해가 있는 경우에 대하여 수치실험을 수행하였다. 이를 토대로 하여 3차원 비선형 문제에 대하여 3차경계요소법을 사용함에 있어서 바른 사용방법에 대한 제시가 가능한 것으로 보인다.

최근, 고차경계요소법의 주요 관심사는 “freak wave”의 전파문제(Brandini & Grilli 2001)와 3차원 비선형 산란문제(Sung & Grilli 2005)등의 자유표면파 현상이므로, 논의의 전개상 우선 이에

대하여 간략히 기술하고 3차 경계요소기법과 수치기법의 여러 과정을 언급한다. 끝으로 해석해가 있도록 구성된 문제에 대하여 3차경계요소법의 정확도와 수렴성을 제시한다.

## 2. 3차원 비선형 산란문제의 수치모델링

### 2.1 지배방정식과 경계조건

전술한 바와 같이 본 연구에서는 3차원 비선형 자유표면 유동현상에 대하여 고차경계요소법을 적용하여 수치모델링을 가한다. 3차원 비선형 자유표면파 문제의 경우 비점성, 비압축성 유동을 가정하여 지배방정식은 속도포텐셜에 대한 Laplace 방정식이다. 공간좌표를  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , 시간을  $t$ , 속도포텐셜을  $\phi(\mathbf{x}, t)$ , 대상 유체영역을  $\Omega(t)$ 라 하면 지배 방정식은 다음과 같이 기술된다.

$$\Delta\phi(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} \in \Omega(t) \subset R^3 \quad (1)$$

여기에서  $\Delta$ 는 라플라스 연산자(Laplace operator)를 의미한다. 따라서 지배방정식 자체는 시간에 대한 미분을 가지고 있지 않으며, 이러한 특성은 경계적분방법에서 적극적으로 활용된다. Fig. 1에서 3차원 비선형 산란 문제를 간략히 도시하고 있다.

유체영역의 경계( $\partial\Omega \equiv S$ )는 자유표면( $S_f$ )과 바닥경계면( $S_b$ ), 물체경계면( $S_o$ ), 그리고 방사면( $S_r$ ) 등으로 이루어진다.

$$\partial\Omega \equiv S = S_f \cup S_b \cup S_o \cup S_r \quad (2)$$

자유표면에서의 경계조건은 압력의 연속성을

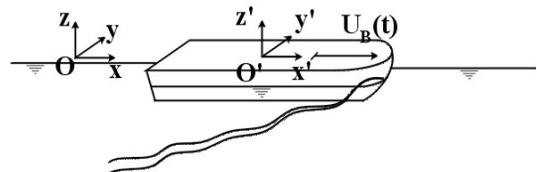


Fig. 1. Three dimensional nonlinear diffraction problem.

부과하는 동력학적 조건과 자유표면위에 있는 물 입자는 자유표면위에 계속 머물러 있어야 하는 운동학적 경계조건을 적용한다.

$$p_f = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho |\nabla \phi|^2 - \rho g z, \mathbf{x} \in S_f \quad (3)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla_H \phi \cdot \nabla_H \zeta - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, z = \zeta(x, y, t) \quad (4)$$

여기에서  $p_f$ 는 자유표면에서의 압력,  $\rho$ 는 물의 밀도, 그리고  $g$ 는 중력 가속도를 나타낸다(압력이 시간과 공간에 대하여 변하지 않는 경우에는 영으로 놓을 수 있다). 여기에서  $\zeta(x, y, t)$ 는 자유표면의 수직위치를 나타내고, 하첨자  $H$ 는 해당량의 수평성분을 말한다. 경계조건 (3), (4)식은 미지 자유표면위에서 정의되는 비선형 방정식으로써, 본 문제의 해법이 어려워지는 주요인이 된다.

자유표면 경계조건 (3)과 (4)는 쇠파될 수 있는 강한 비선형과에 대해서는 물질 시간미분 연산자인  $D/Dt = \partial/\partial t + \nabla \phi \cdot \nabla$ 를 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - gZ, \mathbf{x} \in S_f \quad (5)$$

$$\frac{DX}{Dt} = \nabla \phi, \mathbf{x} = \mathbf{X} = (X, Y, Z) \in S_f \quad (6)$$

여기에서  $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$ 는 자유표면에 놓여 있는 유체입자의 물질좌표로써 수치계산시 자유표면위에 있는 격자점의 좌표가 된다. 위의 방법을 Lagrangian 방법이라 한다.

바닥경계면이나 물체경계면의 조건은 경계면에 붙어 있는 유체입자가 물체와 동일한 속도를 가짐을 뜻한다. 특히 비점성유체를 고려하고 있는 경우에는 물체면에 수직한 방향으로의 속도의 연속성을 부과한다.

$$\phi_n(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} \in S_n \quad (7)$$

위 식에서  $\phi_n$ 은 속도포텐셜의 법선미분치를 뜻

한다. 물체면의 경계조건은 물체면의 속도를 고려하여 다음과 같이 표현한다.

$$\phi_n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in S_b \quad (8)$$

여기에서  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ 는 물체의 속도로서 부유체에 대해서는 물체의 운동방정식과 연성시켜 풀어야 한다(Tanizawa, 1996).

수치계산시에 잡은 계산영역의 바깥쪽 경계면인 수치방사면  $S_s$ 에 대한 조건도 필요하다. 일반적으로 이는 바깥쪽 경계면에서 산란파를 흡수 혹은 투과시키기 위한 것이다.

## 2.2 혼합경계치문제

전술한 지배방정식과 경계조건을 일종의 초기/경계치문제로 이해할 수 있으며, 시적분 기법과 결합함으로써 수치해석을 가한다. 따라서 수치모델링은 시적분 알고리즘, 혼합경계치문제의 구성 및 이의 해법을 위한 고차경계요소법, 선형방정식에 대한 해법, 수치방사조건 및 순정기법 등이 중요한 부분이 된다.

문제에 있어서 시간에 대한 미분은 자유표면 경계조건식에 나타나 있으며, 시간적분에서 직접적으로 다루어지는 조건식은 (3)과 (4)식이다.

일반적으로 비선형과 문제에 있어 자유표면의 위치는 미리 알 수 없으므로, 양함수적인 방법으로 시적분하는 것이 용이하지만 양함수적인 기법의 사용도 원칙적으로 아무런 문제점을 가지고 있지 않다(성홍근, 2000). 양함수 기법으로는 대체로 RK4(4<sup>th</sup>-order Runge-Kutta)와 ABM4(4<sup>th</sup>-order Adams-Bashfort-Moulton) 기법과 같이 시간격에 대하여 오차가 4차인 기법이 사용되고 있다. 한편, Grilli et al.(2000)에서는 주로 Taylor 전개 2차항까지 이용한 2차 양함수법을 사용하여 안정적인 결과를 제시한 예도 볼 수 있다.

본 문제를 시간에 대하여 이산화함으로써 나오는 경계치 문제는 소위 혼합 경계치 문제이다. 즉, 결과적으로 아래와 같이 혼합 경계치 문제에서 일부 경계에서는 속도포텐셜의 값이 주어지고, 또 다른 경계에서는 법선미분치가 주어진다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0, \text{ on } \Omega \\ \phi &= f_D, \text{ on } S_D \subset \partial \Omega \\ \phi_n &= f_N, \text{ on } S_N \subset \partial \Omega, S_D \cup S_N = \partial \Omega \end{aligned} \quad (9)$$

위에서  $S_D$ 와  $S_N$ 은 각각 Dirichlet 경계와 Neumann 경계를 나타낸다. 함수  $f_D$ 와  $f_N$ 은 속도 포텐셜과 그 법선미분치의 값을 뜻하며, 그 값은 시적분의 과정에서 주어지게 된다. 대부분의 경우 자유표면이  $S_D$ 에 해당되며, 물체면, 바닥, 상류와 하류의 수직절단면 등은  $S_N$ 에 해당된다.

수면상에서 움직이는 물체에 대한 수치모델링 기법은 경계적분방정식과 물체의 운동방정식을 연성하여 풀 수 있다(Tanizawa 1996, Sung & Grilli 2005).

물체면과 자유표면의 교차점(intersection point)의 운동을 기술할 필요성이 있다. 이는 교차점의 운동은 자유표면의 운동 뿐 아니라 물체면의 운동을 동시에 고려하여야 하기 때문으로, Liu et al.(2001)과 성홍근(2005)에 제시된 방법이 효과적인 방법인 것으로 판단된다.

### 3. 3차 경계요소법

#### 3.1 경계적분방정식

본 수치해법에서 혼합경계치문제는 아래와 같은 경계적분방정식으로 변환된다.

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) &= \int_{\partial \Omega} \left[ \phi(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \right] dS_{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{x} \in \partial \Omega \end{aligned} \quad (10)$$

여기에서 “3차원 자유공간 그린 함수(3D free-space Green’s function)”는 다음과 같이 주어진다.

$$G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi r}, r = |\mathbf{r}|, \mathbf{r} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x} \quad (11)$$

여기에서  $\alpha(\mathbf{x})$ 는 내부 곡면각으로써, 다음 식과 같이 표현되며 이를 이용하면 (10)의 경계적분방

정식은 아래와 같이 특이성이 완화된 형태를 유도할 수 있다.

$$\alpha(\mathbf{x}) = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} dS_{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{x} \in \partial \Omega \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega} [\phi(\boldsymbol{\xi}) - \phi(\mathbf{x})] \frac{\partial G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} dS_{\boldsymbol{\xi}} \\ = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) dS_{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{x} \in \partial \Omega \end{aligned} \quad (13)$$

위 식의 장점은 더블렛(doublet)의 세기를 감소시킨 것이며, 수치적분에 있어서도 이와 같은 특성을 활용할 수 있다(성홍근, 1999).

경계요소법은 경계적분방정식의 이산화방법에 따라 결정되며, 일반적으로 다음 식과 같이 경계면과 미지수에 대한 이산화방법을 사용한다.

$$\Xi = \sum_{m=1}^{N_{\Xi}} N_m(\mu, \nu), \Xi = [\mathbf{x}, \phi, q = \phi_n] \quad (14)$$

여기에서  $N_{\mathbf{x}}, N_{\phi}, N_q$ 는 각각 경계면과 속도포텐셜 및 속도포텐셜의 법선미분치의 이산화에 필요한 내삽함수의 개수를 나타낸다. 성홍근(1999) 및 Sung et al.(2000)에 나타난 것과 같이 경계면이 복잡한 영역의 혼합경계치문제에 대한 고차경계요소법의 장점이 우수한 것으로 확인되었다.

그러나, 이러한 2차요소의 거의 유일한 문제점은 포텐셜의 공간미분치의 계산시에 요소간 연속성이 좋지 않다는 것이다. 복잡한 비선형 유동의 경우 이러한 단점이 수치계산의 오차를 크게 하고, 불안정성을 높이는 경향이 있다.

본 연구에서는 Grilli et al.(2001)에서 나타난 것과 같이 “4×4 sliding element”(Fig. 2)를 사용한다. 기존 2차요소에 내삽차수를 증가시키고, 요소간의 연속성을 높이는 장점이 있다.

혼합 경계치 문제에서 교차선문제의 해결 또한 중요한 부분이다. 예를 들면, 교차선 문제는 물체면과 자유표면의 교차선에서 법선미분치가 2개의 값을 가지게 되어, 선형대수방정식계에서 미지수보다 식의 수가 부족하게 된다. 이 때, 교차선에

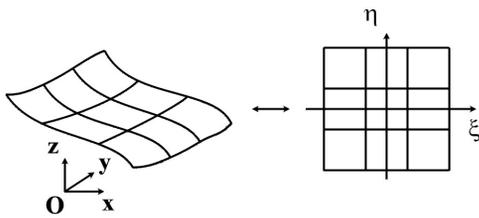


Fig. 2. 4×4 node sliding element.

서 포텐셜의 연속성을 가정하면 이러한 교차선 문제는 현실적으로 해결될 수 있으며, 이를 “다중 절점기법(multi-node technique)”이라 한다. 본 연구에서는 이 기법을 활용하여 교차선 문제를 효과적으로 해결할 수 있었다.

한편 “불연속 요소(discontinuous element)”를 이용한 고차경계요소법은 성홍근(1999)에서 효율적으로 사용될 수 있음이 확인된 바 있다.

절점적용(node collocation)에 의해 이산화방정식은 아래와 같이 기술된다.

$$\alpha_i \phi_i = \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{m=1}^{N_{\mu}^j} [\phi_m^j D_m^j(\mathbf{x}_i) - q_m^j S_m^j(\mathbf{x}_i)] \quad (15)$$

여기에서 내부곡면각  $\alpha_i = \alpha(\mathbf{x}_i)$ ,  $\phi_i = \phi(\mathbf{x}_i)$ 이며, 계수  $D_m^j(\mathbf{x}_i)$ 와  $S_m^j(\mathbf{x}_i)$ 는 각각 source와 doublet의 이차분포에 의한 영향계수를 나타낸다.  $N_e$ 는 요소수,  $N_{\mu}^j$ 는 j번째 요소의 절점의 수를 나타낸다.

내부곡면각이 doublet에 의한 영향계수의 합으로 계산되는 조건을 이용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{N_e} \sum_{m=1}^{N_{\mu}^j} \{[\phi_m^j - \phi_i] D_m^j(\mathbf{x}_i) - q_m^j S_m^j(\mathbf{x}_i)\} = 0 \quad (16)$$

위의 선형방정식을 재배열하면 Neumann 경계에서의 포텐셜과 Dirichlet 경계에서의 수치미분으로 구성된 미지벡터에 대한 행렬방정식을 얻게 된다:

$$A \begin{bmatrix} \phi \\ q \end{bmatrix} = [b] \quad (17)$$

이때 요소에 관한 정보와 절점에 대한 정보를 연결시켜주는 “connectivity list”를 이용하여야 한다. 위 식에서 벡터  $[\phi]$ 는 Neumann 경계점에서 속도포텐셜에 대한 벡터이고,  $[q]$ 는 Dirichlet 경계점에서 포텐셜의 법선미분치에 대한 벡터이다.

비선형과 문제의 경우 계산영역은 시간에 따라 계속 변하게 되므로, 고차경계요소법의 과정은 매 시적분 단계마다 다른 계산영역에 대하여 반복되어야 한다. 그러므로 고차경계요소법에서 영향행렬의 수치적분 및 선형대수방정식이 신속하게 구성되고 풀어져야 한다.

### 3.2 선형방정식의 해법

고차경계요소법에 의하여 생성되는 선형대수방정식은 거대 비대칭 조밀행렬을 수반한다. 이와 같은 매우 일반적인 형태의 행렬식을 풀기 위해서는 전통적인 직접법이나 고전적인 “공액경사법(conjugate gradient method)” 등은 적절하지 않다. 현재 고차경계요소법의 연구자들은 주로 공액경사법의 일반화인 “GMRES 알고리즘(Generalized Minimal RESidual algorithm)” (Saad & Shultz 1986)을 사용하고 있다.

수치과수조기법 분야에서 GMRES 알고리즘을 처음으로 사용한 연구는 Xu(1992)로 알려져 있으며, Zou & Kim(1996)에서는 선조건자의 종류에 따른 GMRES 알고리즘의 성능을 비교·분석하였다.

한편, Fochesato et al.(2003)에 의해 개발된 FMA(Fast Multipole Algorithm)를 이용하여 경계적분을 신속하게 계산하고, GMRES를 이용하여 선형방정식을 더욱 신속하게 풀 수 있음을 보인다. 본 연구에서는 이들이 개발한 수치기법을 활용하여, 보다 효과적인 수치기법을 구성하였다.

### 3.3 경계면에서의 미분치의 계산

RK4, ABM4 등과 같은 시적분기법에서 속도포텐셜의 1차미분치를 계산하여야 한다. 또한 Grilli et al.(2000)에서 Taylor 전개 2차항까지 이용한 2차 양함수법에서는 속도포텐셜의 2차미분치가 필요하다. 우선 1차미분치  $\phi_s$ 와  $\phi_m$ 은 속도포텐셜  $\phi$ (속도포텐셜은 경계조건 혹은 경계요소법

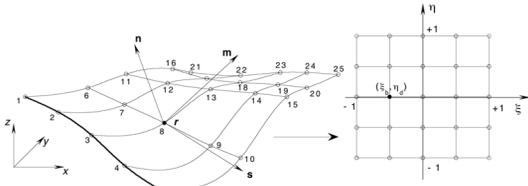


Fig. 3. 5x5 node sliding element.

의 결과로부터 알고 있음)의 “5x5 quartic sliding element”(Fig. 3)상에서의 미분치에 의해 구해진다. 여기에서  $(s, m, n)$ 는 경계면에서 곡선직교좌표계(orthogonal curvilinear coordinate system)를 나타낸다.

2차미분치  $\phi_{ss}, \phi_{sm}, \phi_{mm}, \phi_{ns}, \phi_{nm}$ 은  $\phi_s$ 와  $\phi_m$ 를 계산할 때와 마찬가지로 구할 수 있다. 한편,  $\phi_{nn}$ 는 Laplace 방정식을 적용하여 일차미분치  $\phi_s, \phi_m, \phi_n$ 와 2차미분치  $\phi_{ss}, \phi_{sm}, \phi_{mm}, \phi_{ns}, \phi_{nm}$ 을 이용해서 나타낼 수 있다.

$$\phi_{nn} = -\phi_{ss} - \phi_{mm} - 2(\mathbf{x}_{sm} \cdot \mathbf{m})\phi_s - 2(\mathbf{x}_{sm} \cdot \mathbf{s})\phi_m + [(\mathbf{x}_{ss} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{x}_{mm} \cdot \mathbf{n})]\phi_n \quad (18)$$

3차원 비선형 자유표면파의 수치해석에 있어서는 수치방사조건과 수치경계면에서 비선형파의 반사를 억제하거나 파를 흡수하기 위한 기법은 성홍근(2005)에 기술된 것과 같이 충분히 효과적인 기법이 개발되어 있다. 또한 시적분 알고리즘, 순정기법(smoothing)과 격자재배치 기법 등의 다양한 수치기법이 요구된다.

#### 4. 3차 경계요소법의 정확도와 수렴성

제시된 수치기법의 정확도와 수렴성을 분석하기 위하여 선형파 이론을 이용한 다음의 해석해를 활용한다.

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{A_I g}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin(\theta), \\ \theta &= k_x x + k_y y - \omega t + \theta \\ k &= \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \omega^2 = gk \tanh kh \end{aligned} \quad (19)$$

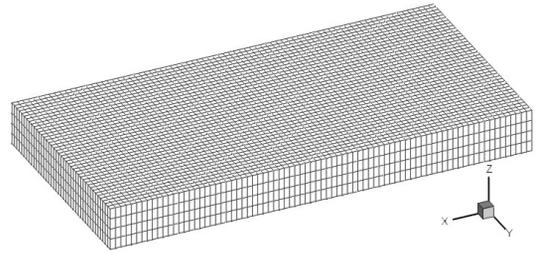


Fig. 4. Typical grid system for numerical test (twice the vertical scale).

여기에서  $A_I$ 는 입사파의 진폭,  $k$ 는 파수(wave number),  $\omega$ 는 주파수,  $\theta$ 는 위상차를 의미한다. 계산영역은 일반적인 수치파수조의 형상과 같이 직육면체이며, 대표적인 격자계는 Fig. 4와 같다. 자유표면은 속도포텐셜 값을 지정하여 Dirichlet 경계면으로, 나머지 경계면은 법선미분치를 적용하는 Neumann 경계면으로 처리하였다. 이에 대하여 계산영역의  $x$  방향의 길이를  $l_x$ 라고 할 때, (19)식에 주어진 파의 파장  $\lambda$ 가  $\lambda = l_x/8$ 인 경우를 고려하였다.

요소의 수는 한 파장 당 4~16개인 경우를 고려하였으며, 자유표면에서의 요소의 크기는 정사 격형을 유지하였다. 한편, 깊이 방향은 4개의 요소로 고정하였다(경계면 요소를 동일한 크기로 유지시킬 수 있는 방법은 존재하지 않는다).

수치 오차의 정의는 아래와 같이 수치해와 해석해의 차이값에 대한 최대값, 평균값, rms(root mean square) 값을 해당 각 경계면에서의 최대값으로 무차원화하였다. 각 오차의 정의는 아래와 같이 표현된다.

$$\epsilon_D^{mean} = \left\{ \frac{1}{N_D} \sum_{x_i \in S_D} \epsilon_i^\phi \right\} / \max(|\phi_{exact}|_{S_D}) \quad (20)$$

$$\epsilon_N^{mean} = \left\{ \frac{1}{N_N} \sum_{x_i \in S_D} \epsilon_i^q \right\} / \max(|q_{exact}|_{S_N}) \quad (21)$$

$$\epsilon_D^{max} = \max(\epsilon_i^\phi)_{x_i \in S_D} / \max(|\phi_{exact}|_{S_D}) \quad (22)$$

$$\epsilon_N^{max} = \max(\epsilon_i^q)_{x_i \in S_D} / \max(|q_{exact}|_{S_N}) \quad (23)$$

$$\epsilon_D^{rms} = \left\{ \sqrt{\frac{1}{N_D} \sum_{x_i \in S_D} (\epsilon_i^\phi)^2} \right\} / \max(|\phi_{exact}|_{S_D}) \quad (24)$$

$$\epsilon_N^{rms} = \left\{ \sqrt{\frac{1}{N_n} \sum_{x_i \in S_N} (\epsilon_i^q)^2} \right\} / \max(|q_{exact}|_{S_N}) \quad (25)$$

여기에서  $\epsilon_i^\phi$ 와  $\epsilon_i^q$ 는 절점  $i$ 에서의 포텐셜과 범선 미분치( $q = \phi_n$ )의 오차를 의미하고,  $N_D$ 와  $N_N$ 는 각각 Dirichlet 경계면과 Neumann 경계면의 절점 수이다.

Fig. 5는 Fig. 4와 같은 영역에 대한 수치실험 결과이다. 수평축은 격자의 길이와 입사파의 길이

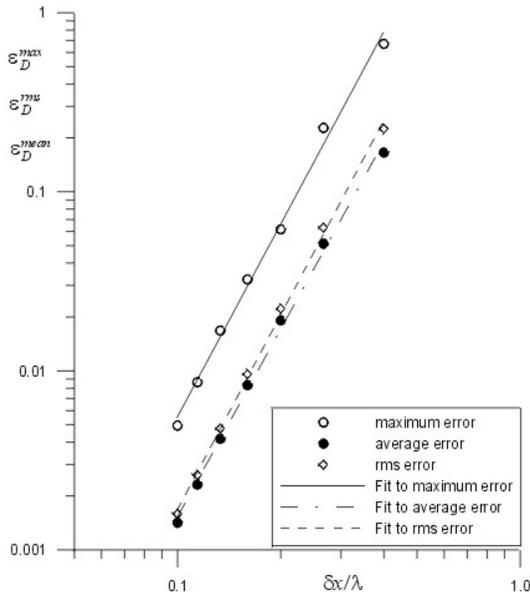


Fig. 5. Convergence of the present method on the Dirichlet boundary (Rectangular domain with the flat top).

의 비를 나타내며, 연직축은 수치오차이다. 각 오차를 요소길이로 나타내면, 아래의 식과 같이 표현된다. 즉, 오차를 정의하는 방법에 관계없이, 본 3차경계요소법은 요소의 길이의 약 3.5승에 비례하는 수렴성을 보이는 것을 알 수 있다. 더불어 Dirichlet 경계면의 평균오차가 1%미만의 정확도를 가지기 위해서 한 파장당 약 6개의 요소가 필요하다

$$\epsilon_D^{max} = 20.64 \times (\delta x / \lambda)^{3.57} \quad (26)$$

$$\epsilon_D^{mean} = 4.62 \times (\delta x / \lambda)^{3.48} \quad (27)$$

$$\epsilon_D^{rms} = 6.85 \times (\delta x / \lambda)^{3.61} \quad (28)$$

한편 Fig. 6은 Neumann 경계면에서의 수치오차에 대한 것으로서, Dirichlet 경계면에서보다 정확도가 좋다는 것을 보이고 있다. 또한 다음 식과 같이 수렴성도 조금 더 좋은 것을 알 수 있다. 이러한 경향은 혼합경계치문제의 일반적인 경향으로 이해되고 있다(성홍근, 1999).

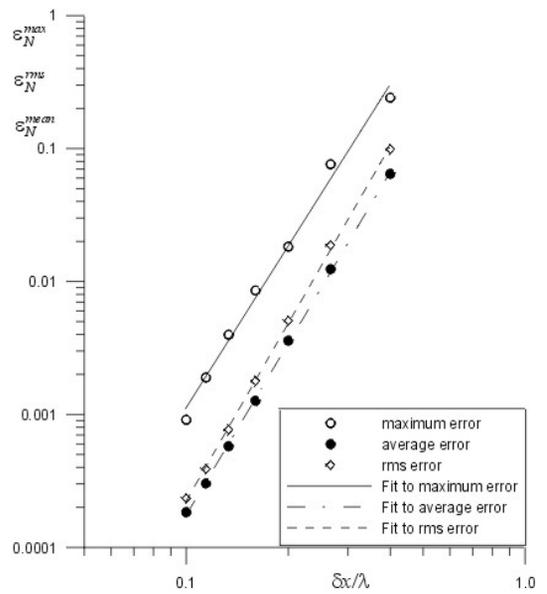


Fig. 6. Convergence of the present method on the Neumann boundary (Rectangular domain with the flat top).

$$\epsilon_N^{\max} = 12.32 \times (\delta x/\lambda)^{4.04} \quad (29)$$

본 문제에 대한 CPU 시간은 Fig. 7과 같이 나타나며, 아래의 식과 같이 미지수 개수의 1.3승에 비례함을 확인하였다.

$$CPUtime(sec) = 0.0016 \times N^{1.32} \quad (30)$$

경계조건과 경계요소해석의 결과를 이용하여 미분치를 계산한 결과에 대한 오차해석을 Fig. 8에 도시하였다. 속도오차는 요소길이의 약 3.5승에 비례하고 있음을 알 수 있다. 이는 자유표면에서의 속도를 계산함에 있어서 범선미분치의 수치오차가 직접 영향을 주고 있기 때문인 것으로 이해할 수 있다.

$$\epsilon_V^{\max} = 73.58 \times (\delta x/\lambda)^{3.34} \quad (31)$$

$$\epsilon_V^{mean} = 8.16 \times (\delta x/\lambda)^{3.47} \quad (32)$$

$$\epsilon_V^{rms} = 14.45 \times (\delta x/\lambda)^{3.57} \quad (33)$$

상자형의 계산영역뿐만 아니라, 자유표면의 형

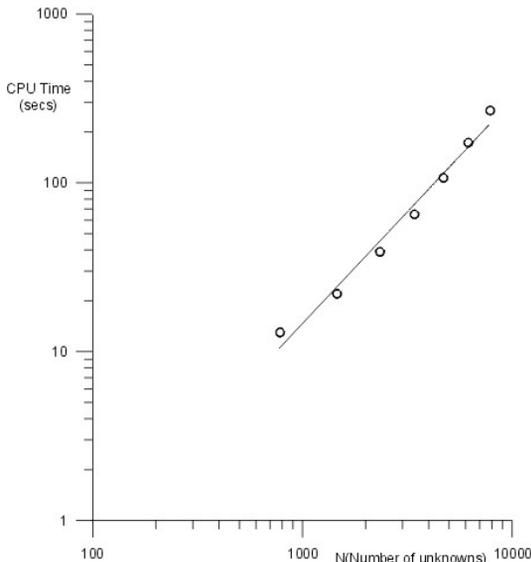


Fig. 7. CPU time of the present method (Rectangular domain with the flat top).

상이 비선형과의 형상과 유사한 경우에 대하여 정확도와 수렴성을 확인할 필요성이 있다. 본 연

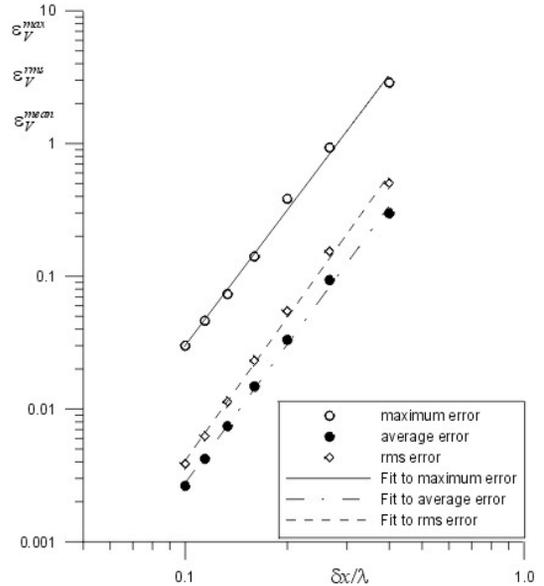


Fig. 8. Convergence of the present method for the velocity estimation(Rectangular domain with the flat top).

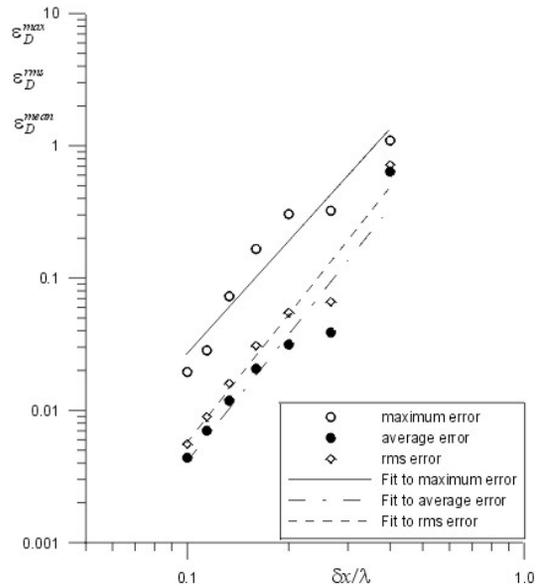


Fig. 9. Convergence of the present method on the Dirichlet boundary(Rectangular domain with a wavy top).

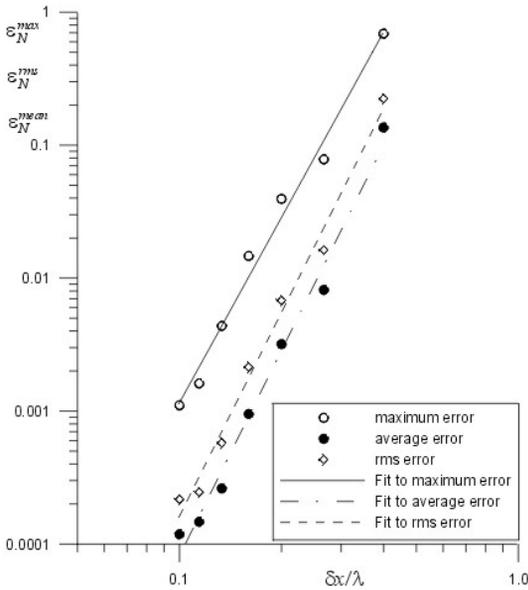


Fig. 10. Convergence of the present method on the Neumann boundary(Rectangular domain with a wavy top).

구에서는 (19)에 주어진 포텐셜 함수가  $z > 0$ 인 영역까지도 확장될 수 있음을 이용하여, Fig. 4와 같은 계산영역을 가정하고 자유표면에는 (19)식에 의하여 주어지는 속도포텐셜의 값을 지정하고 나머지 경계면에는 법선미분치를 부여한다. 이와 같은 혼합경계치문제는 사실상 비선형 자유표면파의 전과과정을 수치해석할 때, 특정 시간계에서 나타날 수 있는 모양과 유사하다.

이에 대한 수치해석 결과는 Fig. 9와 10에 제시하였다. 본 수치계산은  $A_I/\lambda = 1/10$ 인 경우로써, 비선형성이 아주 강한 예에 해당된다. Fig. 5, 6과 비교하면, 자유표면에 파형이 존재하는 경우에 정확도가 떨어지고, 수렴성 또한 다소 나빠지는 것을 확인할 수 있다. 계산결과에 의하여 Dirichlet 경계면과 Neumann 경계면에서의 최대 오차는 아래 식과 같은 거동을 보인다.

$$\epsilon_D^{\max} = 11.87 \times (\delta x/\lambda)^{2.82} \tag{34}$$

$$\epsilon_N^{\max} = 49.13 \times (\delta x/\lambda)^{4.63} \tag{35}$$

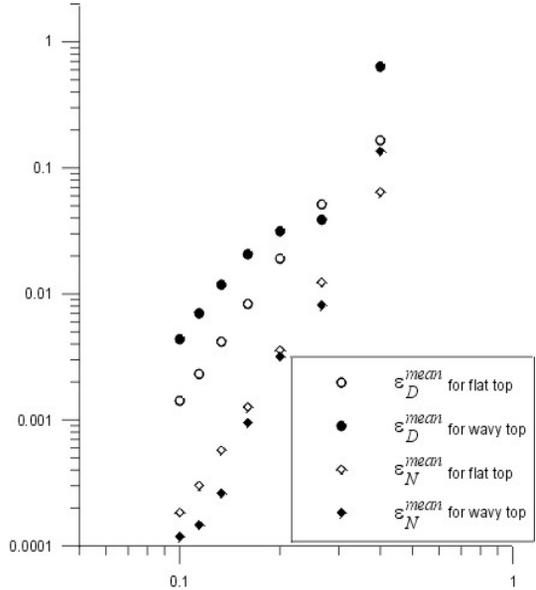


Fig. 11. Comparison of average errors for the flat and wavy top.

따라서, 본 3차경계요소법은 자유표면의 형상이 곡면이 경우, 수치오차는 요소의 길이의 약 2.8승(요소밀도가 가장 희박한 경우를 제외하면, 3.11승)에 비례하는 수렴성을 보이는 것을 알 수 있다. 더불어 Dirichlet 경계면의 평균오차가 1%미만의 정확도를 가지기 위해서 한 파장당 약 8개의 요소가 필요하다는 것을 확인하였다.

자유표면의 형상차이에 의한 결과를 비교하면 (Fig. 11), Neumann 경계면에서의 수치오차는 격자가 작을 때는 상자형 영역에 비하여 큰 차이를 보이고 있으나, 격자가 조밀해지면 오차의 수준은 거의 대등하게 되는 것을 볼 수 있다. 이는 3차경계요소가 곡면의 형상을 충분히 표현할 수 있게 되면 경계요소해석 결과도 정확도가 높아진다고 판단할 수 있다.

### 5. 결 론

본 연구에서는 Grilli et al.(2001)에 의해 제안된 바 있는 3차경계요소법의 정확도 및 수렴성을 제시하였다. 분석 결과에 의하면 3차경계요소법은 한 파장당 최소 8개의 요소로써 평균 수치오차

1%미만의 정확한 수치해를 줄 수 있으며, 요소의 길이에 대하여 약 3승에 비례하여 수치오차가 감소하는 것을 확인하였다. 이의 결과는 Dirichlet 경계면인 자유표면을 기준으로 기술한 것이며, Neumann 경계면에서의 오차 수준은 Dirichlet 경계면보다 훨씬 낮음을 확인하였다.

자유표면유동에 대한 비선형 수치계산을 위하여 반드시 요구되는 미분치 추정에 있어서 요소가 충분한 밀도를 가지고 있는 경우, 자유표면에서의 수치오차와 대등한 수준의 오차를 가지게 된다. 이로써, Grilli et al.(2001)에 의한 3차경계 요소법은 비선형 자유표면과 유동에 대하여 정확도와 수렴성이 우수함을 확인할 수 있다.

## 후 기

본 논문은 한국해양연구원 기본연구사업 과제인 『해난사고 예방 및 구난체계 구축사업(2004.1~2004.12)』과 한국과학재단의 해외 Post-doc. 연수지원(2003년 후반기)에 의하여 수행한 연구결과 중 일부이다.

## 참 고 문 헌

- [1] 성홍근 1999, 고차경계요소법을 이용한 3차원 비선형 산란문제의 수치해석, 서울대학교 공학박사 학위논문.
- [2] 성홍근 & 최항순 2000, “고차경계요소법을 이용한 2차원 비선형 방사문제의 수치해석”, 대한조선학회 논문집 제37권 제1호, pp. 67~81.
- [3] 최윤락, 1997, 고차경계요소법을 이용한 2차원 파랑하중 해석, 서울대학교 공학박사 학위논문.
- [4] 홍사영, 1994, 고차경계요소법에 의한 선체 주위 유동 해석, 서울대학교 공학박사 학위논문.
- [5] 성홍근, 2005, 고차경계요소법을 이용한 고속운동 수면체 주위의 비선형 자유표면유동 모델링 기법 연구, 한국과학재단 해외 Post-doc. 연수결과 및 귀국보고서.
- [6] Boo, S.Y. 1993, Application of Higher Order Boundary Element Method to Steady Ship Wave Problem and Time Domain Simulation of Nonlinear Waves, Ph.D. Dissertation, Texas A&M University.
- [7] Brandini, C. & Grilli, S.T. 2001, “Modeling of Freak Wave Generation in a 3D-NWT”, Proceedings of the Eleventh ISOPE Conference, Vol. 3, pp. 124-131.
- [8] Brebbia, C.A. 1984, *Topics in Boundary Element Research. Vol. 1 : Basic Principle and Applications*, Springer-Verlag, Berlin.
- [9] Broeze, J. 1993, Numerical Modelling of Nonlinear Free Surface Waves with a 3D Panel Method, PhD Thesis, University of Twente.
- [10] Dawson, C. W. 1977, A practical computer method for solving ship-wave problems. Proc. 2nd Intl. Conf. Num. Ship Hydro., Berkley, CA, 30-38.
- [11] Dommermuth, D.G., Yue, D.K.P., Lin, W.M., Rapp, R.J., Chan, E.S. and Melville, W.K. 1988, “Deep-water plunging breakers: a comparison between potential theory and experiments”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 184, pp. 267~288.
- [12] Ferrant, P. 1995, Time domain Computation of Nonlinear Diffraction Loads Upon Three Dimensional Floating Bodies, Proceedings of the Fifth ISOPE Conference, Vol. 3, pp. 280~288.
- [13] Ferrant, P. 1999, “Fully Non-Linear Diffraction of Regular Waves by a Multi-Column Structure”, Proceedings of the Ninth ISOPE, Vol. 3, pp. 337~344.
- [14] Fochesato, C., Dias, F., and Grilli, S.T., 2003, “Numerical Model Using the Fast Multipole Algorithm for Nonlinear Three-dimensional Free Surface Waves over Arbitrary Bottom”, Proceedings of the Eighth ISOPE Conference.

- [15] Grilli, S.T. & Horriolo, J. 1998, "Periodic Wave Shoaling Over Barred-Beaches in a Fully Nonlinear Numerical Wave Tank", Proceedings of the Eighth ISOPE Conference, Vol. 3, pp. 294~300.
- [16] Grilli, S.T., Guyenne, P. & Dias, F. 2000, "Modeling of Overturning Waves Over Arbitrary Bottom in a 3D Numerical Wave Tank", Proceedings of the Tenth ISOPE Conference, Vol. 3, pp. 221~228.
- [17] Grilli, S.T., Guyenne, P. & Dias, F. 2001, "A Fully Nonlinear Model for Three-dimensional Overturning Waves over an Arbitrary Bottom", International Journal of Numerical Methods in Fluids, Vol. 35, pp. 829~867.
- [18] Grilli, S.T., Skourup, J., & Svendsen, I.A., 1989, An Efficient Boundary Element Method for Nonlinear Water Waves, Engineering Analysis of Boundary Elements, Vol. 6, No. 2, pp. 97~107.
- [19] Hess J. L. & A. M. O. Smith, 1964, Calculation of nonlinear potential flow about arbitrary three-dimensional bodies. J. Ship Res. 8(2), 22-44.
- [20] Kim, C.H. 1995, Recent Progress in Numerical Wave Tank Research : A Review, Proceedings of the Fifth ISOPE Conference, Vol. 3, pp. 1~9.
- [21] Liu Y., M. Xue & D. K. P. Yue 2001, Computations of fully nonlinear three-dimensional wave-wave and wave-body interactions. Part 2. Nonlinear waves and forces on a body, Journal of Fluid Mechanics, 438, 41-66.
- [22] Longuet-Higgins, M.S. and Cokelet, E.D., 1976, "The deformation of steep surface waves on water, I. A numerical method of computations", Proc. Roy. Soc. London, 1976, Ser. A, Vol. 350, pp. 1~26.
- [23] Ortiz, J. C. and Douglass, S. L. 1993, Overhauser boundary elements solution for periodic water waves in the physical plane, Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 11, Issue 1, pp. 47~54.
- [24] Pelekasis, N. A., Tsamopoulos, J. A. and Manolis, G. D. 1992, A hybrid finite-boundary element method for inviscid flows with free surface, Journal of Computational Physics, Volume 101, Issue 2, pp. 231~251.
- [25] Romate, J.E. 1989, The Numerical Simulation of Nonlinear Gravity Waves in Three Dimensions Using a Higher Order Panel Method, PhD Thesis, University of Twente.
- [26] Saad, Y. and Schultz, M.H. 1986, GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, SIAM Journal of Scientific Statistic Computation, No. 7, pp. 856~869.
- [27] Sung, H.G., Hong, S.Y. & Choi, H.S., 2000, "Evaluation of Nonlinear Wave Forces on a Fixed Body by Numerical Wave Tank Techniques", Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 214, pp. 825~839.
- [28] Sung, H.G. and Grilli, S.T. 2005. "Numerical Modeling of Nonlinear Surface Waves caused by Surface Effect Ship: Dynamics and Kinematics", Proceedings of the Fifteenth ISOPE Conference, pp. 124~131.
- [29] Tanizawa, K., 1996, "Nonlinear Simulation of Floating Bodies in Waves", Proceedings of the Sixth ISOPE Conference, Vol. 3, pp. 414~420.
- [30] Xü, H. 1992, Numerical Study of Fully Nonlinear Water Waves in Three Dimensional, Ph.D. Dissertation, MIT.
- [31] Zou, J. & Kim, C.H. 1996, "A Note on Preconditioned GMRES Solver", Proceedings of the Sixth ISOPE Conference, Vol. 3, pp. 44~49.